



# THÈSE

En vue de l'obtention du

## DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)

Cotutelle internationale avec l'Université de Ngaoundéré au  
Cameroun

---

Présentée et soutenue par :

**M. FTATSI MBETMI Guy-de-patience**  
**le vendredi 31 août 2018**

Titre :

Fiabilité résiduelle des ouvrages en béton dégradés par réaction alcali-granulat : Application au barrage hydroélectrique de Song Loulou

---

École doctorale et discipline ou spécialité :

ED MEGEP : Génie civil

Unité de recherche :

Laboratoire Matériaux et Durabilités des Constructions (LMDC)

Directeurs de Thèse :

M. Frédéric DUPRAT, Professeur, INSA Toulouse  
M. Tibi BEDA, Professeur, Université de Ngaoundéré

Jury :

M. Alain SELLIER, Professeur, Université Toulouse 3 Paul Sabatier, Président  
M. Alaa CHATEAUNEUF, Professeur, Université Clermont Auvergne, Rapporteur  
Mme Corinne CURT, Ingénieur de recherche – HDR, IRSTEA, Rapporteur  
M. Bienvenu KENMEUGNE, Professeur, Université de Yaoundé 1, Examineur  
M. Daniel TIEUDJO, Professeur, Université de Ngaoundéré, Invité  
M. Thomas DE LARRARD, Maître de Conférences, INSA Toulouse, Invité  
M. Etienne GRIMAL, Ingénieur études et recherches, Electricité De France CIH, Invité



**UNIVERSITE DE NGAOUNDERE  
ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES  
SCIENCES AGROINDUSTRIELLES**



**THE UNIVERSITY OF NGAOUNDERE  
NATIONAL ADVANCED SCHOOL OF AGRO-  
INDUSTRIAL SCIENCES**

**DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE  
DEPARTMENT OF MECHANICAL ENGINEERING**

**Unité de Formation Doctorale - Physique Appliquée et Ingénierie**

**FIABILITE RESIDUELLE DES OUVRAGES EN BETON DEGRADEES PAR  
REACTION ALCALI-GRANULAT : APPLICATION AU BARRAGE  
HYDROELECTRIQUE DE SONG LOULOU**

**THESE EN COTUTELLE  
AVEC L'UNIVERSITE TOULOUSE 3 PAUL SABATIER**

Présentée et soutenue en vue de l'obtention du diplôme de :  
DOCTORAT de l'Université de Toulouse  
DOCTORAT/Ph.D. de l'Université de Ngaoundéré

Parcours/spécialité : Génie Mécanique / Ingénierie des Équipements et Productique

**Par**

**FTATSI MBETMI Guy-de-patience  
Matricule : 04M044EN**

**Jury :**

Alain SELLIER	Professeur	Université Toulouse 3 Paul Sabatier	Président
Frédéric DUPRAT	Professeur	INSA Toulouse	Directeur
Tibi BEDA	Professeur	Université de Ngaoundéré	Directeur
Alaa CHATEAUNEUF	Professeur	Université Clermont Auvergne	Rapporteur
Bienvenu KENMEUGNE	Maître de Conférences	Université de Yaoundé 1	Rapporteur
Corinne CURT	Ingénieur de recherche HDR	IRSTEA	Rapporteur
Daniel TIEUDJO	Maître de Conférences	Université de Ngaoundéré	Membre
Thomas DE LARRARD	Chargé de cours	INSA Toulouse	Membre
Etienne GRIMAL	Ingénieur de recherche	Electricité De France - CIH	Invité

**Année 2018**



## Remerciements

Le travail de thèse exposé dans ce mémoire est le fruit d'une cotutelle entre l'Université Toulouse 3 Paul Sabatier et l'Université de Ngaoundéré, ainsi que de la collaboration avec l'entreprise AES-SONEL (actuellement ENEO) au Cameroun. J'adresse mes sincères remerciements aux responsables de ces institutions qui ont été réceptifs à mes sollicitations.

Je remercie Professeur Alexis KUITCHE, Responsable de l'Unité de Formation Doctorale Physique Appliquée et Ingénierie de l'Université de Ngaoundéré dans laquelle ma thèse s'est en partie déroulée, pour sa diligence et ses conseils. Je remercie les Professeurs Gilles ESCADEILLAS et Alain SELLIER, respectivement ancien et actuel Directeur du Laboratoire Matériaux et Durabilité des Constructions (LMDC) de Toulouse pour m'y avoir accueilli, et spécialement le Professeur SELLIER qui a également présidé mon jury de thèse.

Je remercie mes deux directeurs de thèse, Professeur Tibi BEDA et Professeur Frédéric DUPRAT pour avoir dirigés ce modeste travail de recherche et pour leurs conseils. Professeur DUPRAT, Frédéric comme vous m'avez demandé de vous appeler dès mon arrivée au LMDC en 2013, vous avez décidé de m'accorder votre confiance juste sur la base d'un courriel avec mon CV et le résumé de mon projet, je sais que le déroulement des événements vous a probablement parfois amené à le regretter. Cependant, j'espère que l'accouchement a effacé les péripéties de la grossesse, et que les nombreux suspenses et rebondissements, à l'image de « la Moldau » de SMETANA ou la 9<sup>ème</sup> symphonie de BEETHOVEN, constitueront d'agréables souvenirs. Je vous sais gré de vos qualités humaines et scientifiques dont j'ai bénéficié pendant la thèse.

Je souhaite exprimer ma profonde gratitude à mes co-encadrants, Professeur Daniel TIEUDJO et Dr Thomas DE LARRARD. Professeur TIEUDJO, vous êtes l'un de mes modèles d'efficacité pédagogique depuis le cycle d'Ingénieur où vous avez été mon enseignant de maths, vous côtoyer a également renforcé en moi l'ouverture, la simplicité, l'objectivité ; merci d'avoir répondu à chacune de mes sollicitations malgré vos occupations administratives et pour avoir mis le parc d'ordinateurs sous votre responsabilité à ma disposition pour certains des nombreux calculs de ma thèse. Thomas, merci pour le chemin parcouru ensemble dans ce travail de thèse, pour ta bonne humeur quasi-permanente, pour ta compréhension et nos échanges scientifiques. Messieurs Frédéric, Thomas et Daniel, merci pour la centaine de visioconférences et les innombrables courriels échangés au cours de la thèse.

Ma sincère gratitude à Stéphane MULTON pour nos nombreux échanges, pour l'expertise sur la réaction alcali-granulat dont il m'a fait bénéficier, et son code FORTRAN qui a servi de noyau au mien dans l'analyse de sensibilité.

J'adresse mes sincères remerciements au Professeur Alaa CHATEAUNEUF, au Dr-HDR Corinne CURT, et au Professeur KENMEUGNE Bienvenu, pour avoir autorisé ce travail à être soutenu après l'avoir rapporté, et pour leur participation à mon jury de thèse.

Je remercie le Service de Coopération et d'Action Culturelle (SCAC) de l'Ambassade de France au Cameroun, le Ministère de l'Enseignement Supérieur (MINESUP) du Cameroun, l'Ecole Doctorale Mécanique, Energétique, Génie civil & Procédés (ED-MEGeP), Pour leurs appuis financiers.

J'aimerais également formuler quelques pensées chaleureuses à l'endroit de ceux qui ont participés d'une manière ou d'une autre à l'accomplissement de ce travail de thèse.

Mes amis thésards du LMDC : Célestine, Duc, Ndriana, Pablo, Moustapha, Khadim, Diouf, Hognon, Billy, Nuraziz, Célimène, Rudy, Alexandre, Aurélie, Isabelle, Ponleu, Hugo, Raphaëlle, Thomas, Saïd, Ilgar, Raphaëlle, pour les moments passés ensemble ;

Mes amis thésards de PAI : Alain, Jean bosco, Abraham, Duvalier ;

Mes collègues de l'IUT-ENSAI ;

Mes amis Ingénieurs : DJIEDZOLE, MFOMEN, WALDOGO et les promos 2007, et 2008 des Ing. MIP ;

Monsieur LOWE Gabriel Daddy et sa famille pour leur soutien ;

Ma belle-famille, mon beau-père NGOUDJOU André et son épouse LONTSI Delphine pour leur sollicitude, Mes beaux-frères Morel et Carin, mes belles-sœurs Synthia, Aïcha, et Bénita ;

A ma famille, ma mère NGUETKAM Hélène, mes frères et sœurs NJIYIM Yannick, DYANKEU Vanessa, BOUTCHOUANG Patrick, MBETMI Charlie, NGUETKAM Loraine, TANKEU Raoul à la mémoire de mon père MBETMI, qui nous a quitté il y a dix ans, merci pour l'œuvre que tu as accomplie de ton vivant, nous espérons te rendre fier...*Me lapte zine, bii tchue me bouo.*

Ma chère et tendre épouse KENNE MELI Viannie Ingrid, « MA » merci pour ta patience, et pour ton soutien multiforme, merci surtout de cheminer avec moi dans cette vie, et pour notre fille NGUETKAM NGOUDJOU Ashley Johanna.

Merci à tous ceux qui ont participé d'une manière ou d'une autre à l'aboutissement de ce travail et que je n'ai pas explicitement cité.

Si Dieu ne bâti, celui qui bâti le fait en vain. Ma culture scientifique est étendue par ma foi en Dieu et l'expérience perpétuelle de sa présence. *Wupi bo Yahwe.*

## Résumé

Titre : Fiabilité résiduelle des ouvrages en béton dégradés par réaction alcali-granulat : Application au barrage hydroélectrique de Song Loulou.

Résumé :

Ce travail de thèse propose une méthodologie multi-échelle basée sur l'utilisation de modèles de substitution fonction de variables aléatoires, pour évaluer la fiabilité résiduelle d'ouvrages en béton atteints de réaction alcali-granulat (RAG), dans l'optique d'une meilleure maintenance. Les modèles de substitution, basés sur des développements en chaos de polynômes des paramètres d'une fonction de forme (sigmoïde dans les cas traités), ont été constitués à plusieurs échelles, afin notamment de réduire les temps de calculs des modèles physiques sous-jacents. A l'échelle microscopique, le modèle de RAG employé est celui développé par Multon, Sellier et Cyr en 2009, comprenant initialement une vingtaine de variables aléatoires potentielles. A l'issue d'une analyse de sensibilité de Morris, le modèle de substitution permet de reproduire la courbe de gonflement dans le temps du volume élémentaire représentatif en fonction de neuf variables aléatoires. L'utilisation du modèle de substitution construit, pour la prédiction des effets mécaniques du gonflement dû à la RAG sur une éprouvette, a nécessité de prendre en compte l'anisotropie de ces effets en améliorant les fonctions poids proposées par Saouma et Perotti en 2006. L'échelle de l'éprouvette étant validée par la confrontation des prédictions aux données expérimentales des travaux de thèse de Multon, une application à l'échelle du barrage de Song Loulou a été entreprise. Le calcul du comportement thermo-chemo-mécanique d'une pile d'évacuateur de crues, dont les résultats en déplacements ont pu être confrontés aux données d'auscultation fournies par l'entreprise AES-SONEL (devenue ENEO), a été réalisé. Des modèles de substitution ont été construits ensuite à l'échelle de la structure afin d'obtenir les déplacements aux points d'intérêt, liés aux états limites de fonctionnement des évacuateurs, et procéder ainsi à l'estimation de la fiabilité résiduelle du barrage. Les calculs d'analyse de sensibilité et la construction des modèles de substitution ont été implémentés en Fortran, Java et OpenTURNS. Les calculs sur éprouvette et pile de barrage ont été effectués sous Cast3M.

Mots clés : Réaction alcali-granulat, Analyse de sensibilité, Modèle de substitution (Métamodèle), Anisotropie, Barrage, Fiabilité.

## Abstract

Title: Residual reliability of alkali-aggregate reaction affected concrete structures: Application to the Song Loulou hydroelectric dam.

Abstract:

This work proposes a multi-scale methodology based on the use of surrogate models function of random variables, to evaluate the residual reliability of concrete structures suffering from alkali-aggregate reaction (AAR), for a better maintenance purpose. Surrogate models, based on polynomial chaos expansion of the parameters of a shape function (sigmoid in the studied cases), have been constituted at several scales, in particular in order to reduce computation time of the underlying physical models. At the microscopic scale, the AAR model employed is that developed by Multon *et al* in 2009, initially comprising about twenty potential random variables. At the end of a Morris sensitivity analysis, the surrogate model enables to reproduce the expansion curve over time of the representative elementary volume as a function of nine random variables. The use of the built-in surrogate model in predicting the mechanical effects of AAR expansion on a concrete core required to take into account the anisotropy of these effects by improving the weight functions proposed by Saouma and Perotti in 2006. The core's scale being validated by the comparison of the predictions with the experimental data of Multon's thesis work, an application at the scale of the Song Loulou dam was undertaken. The computation of the thermo-chemo-mechanical behavior of a spillway stack, whose results in displacement could be compared with the auscultation data provided by the company AES-SONEL (now ENEO), was realized. Surrogate models were then constructed at the scale of the structure to obtain displacements at the points of interest, related to the operating limit states of the spillways, and thus to estimate the residual reliability of the dam. The sensitivity analysis computations as well as the construction of the surrogate models were implemented in Fortran, Java and OpenTURNS. Computations on concrete cores and Song Loulou dam spillway were performed under Cast3M.

Keywords: Alkali-aggregate reaction (AAR), Sensitivity analysis, Surrogate model (metamodel), Anisotropy, Dam, Reliability.



# Table des matières

REMERCIEMENTS .....	I
RÉSUMÉ .....	III
ABSTRACT .....	IV
TABLE DES MATIÈRES .....	V
LISTE DES ABRÉVIATIONS ET SYMBOLES.....	X
LISTE DES FIGURES .....	XII
LISTE DES TABLEAUX .....	XVII
INTRODUCTION GÉNÉRALE .....	1
CHAPITRE I - LA RÉACTION ALCALI-GRANULAT : PHÉNOMÉNOLOGIE, GESTION DES OUVRAGES ATTEINTS ET MODÉLISATIONS .....	5
I.1 INTRODUCTION .....	6
I.2 PHYSICO-CHIMIE DE LA RÉACTION ALCALI-SILICE.....	7
I.2.1 GÉNÉRALITÉS SUR LES RÉACTIONS ALCALI-GRANULAT .....	7
I.2.2 MÉCANISMES DE FORMATION DE GEL PAR LA RAS .....	8
I.2.3 HYPOTHÈSES SUR L'ORIGINE DES GONFLEMENTS CRÉÉS PAR LA RAS.....	9
I.2.3.1 Hypothèse des pressions osmotiques [Hanson 1944] [Glasser 1979] .....	10
I.2.3.2 Hypothèse de la dissipation du gel [Jones 1988].....	10
I.2.3.3 Hypothèse des potentiels chimiques [Dron et al. 1998] .....	10
I.2.3.4 Hypothèse de la double couche électrique [Prezzi et al. 1997] .....	10
I.2.3.5 Hypothèse du gonflement des corps poreux [Couty 1999].....	10
I.2.3.6 Hypothèse du gonflement granulaire des mines de DOUAI .....	10
I.2.4 INTERACTIONS ENTRE PARAMÈTRES MATÉRIAUX ET RAS.....	11
I.2.4.1 Influence des caractéristiques des granulats .....	11
I.2.4.2 Influence de la teneur en alcalin .....	12
I.2.4.3 Rôle de l'eau.....	12
I.2.4.4 Influence des porosités.....	13
I.2.4.5 Influence de la température .....	13
I.2.4.6 Courbe caractéristique de gonflement libre de béton.....	13
I.2.4.7 Impact des contraintes sur le gonflement .....	14
I.2.4.8 Conséquences mécaniques.....	14
I.2.4.9 Propriétés du gel .....	15
I.2.5 SYNTHÈSE .....	15
I.3 LA RAG DANS LES BARRAGES.....	16
I.3.1 LE RECALCUL DE BARRAGES ATTEINT DE RAG .....	17
I.3.1.1 Démarche de recalcul de l'IFSTTAR .....	17
I.3.1.2 Démarche de recalcul du LMDC et EDF .....	20
I.3.1.3 Essais pour le diagnostic et le suivi de la RAG.....	21
I.3.1.4 Synthèse de données de retour d'expérience .....	22
I.3.2 SOLUTIONS PALLIATIVES DISPONIBLES .....	24
I.3.2.1 Injection des fissures .....	24
I.3.2.2 Application d'une peinture .....	24
I.3.2.3 Mise en œuvre de revêtement d'étanchéité.....	25
I.3.2.4 Amélioration du drainage .....	25
I.3.2.5 Application de composés de lithium.....	25
I.3.2.6 Mise en œuvre d'armatures passives ou actives de renfort.....	25
I.3.2.7 Libération des contraintes par sciage .....	26
I.3.2.8 Synthèse .....	26
I.3.3 DISPOSITIONS PRÉVENTIVES.....	26

I.3.3.1 Mesures préventives à la construction .....	27
I.3.3.2 Auscultation et suivi préventif de barrages atteints de RAG .....	28
I.3.4 SYNTHÈSE.....	29
<b>I.4 MODÉLISATION DE LA RAS DANS LE BÉTON .....</b>	<b>30</b>
I.4.1 MODÉLISATIONS DES OBSERVATIONS À L'ÉCHELLE DE LA STRUCTURE.....	31
I.4.1.1 Le modèle de [Thompson et al. 1994].....	31
I.4.1.2 Le modèle de [Léger et al. 1996].....	31
I.4.1.3 Le modèle de [Huang & Pietruszczak 1999].....	32
I.4.1.4 Le modèle de [Sellier & Capra 1997, Capra & Sellier 2003] .....	32
I.4.1.5 Le modèle de [Ulm et al. 2000] .....	32
I.4.1.6 Le modèle de [Li 2002] .....	33
I.4.1.7 Le modèle de [Bangert et al. 2004].....	33
I.4.1.8 Le modèle de [Farage et al. 2004] .....	33
I.4.1.9 Le modèle de [Saouma & Perotti 2006] .....	33
I.4.1.10 Le modèle de [Grimal 2007].....	34
I.4.1.11 Le modèle de [Comi et al. 2009] .....	34
I.4.1.12 Le modèle de [Pesavento et al. 2012].....	35
I.4.1.13 Synthèse.....	35
I.4.2 MODÉLISATIONS DES OBSERVATIONS À L'ÉCHELLE DU GRANULAT .....	37
I.4.2.1 Le modèle de [Nielsen et al. 1993].....	37
I.4.2.2 Le modèle de [Furusawa et al. 1994].....	37
I.4.2.3 Le modèle de [Sellier et al. 1995].....	38
I.4.2.4 Le modèle de [Bažant & Steffens 2000] .....	39
I.4.2.5 Le modèle de Xi.....	40
I.4.2.6 Le modèle de [Comby Peyrot 2006] .....	40
I.4.2.7 Le modèle de [Ichikawa & Miura 2007] .....	41
I.4.2.8 Le modèle de [Poyet et al. 2007].....	42
I.4.2.9 Le modèle de [Multon et al. 2009] .....	43
I.4.2.10 Le modèle de [Dunant 2009].....	43
I.4.2.11 Le modèle de [Shin et al. 2011].....	44
I.4.2.12 Le modèle de [Giorla 2013].....	45
I.4.2.13 Le modèle de [Charpin & Ehlacher 2014b] .....	45
I.4.2.14 Synthèse.....	46
I.4.3 LE MODÈLE [MULTON ET AL. 2009] .....	47
I.4.3.1 Cadre de la modélisation .....	47
I.4.3.2 Données d'entrée du modèle .....	48
I.4.3.3 Algorithme d'implémentation du modèle.....	48
<b>I.5 SYNTHÈSE.....</b>	<b>50</b>
<b>CHAPITRE II - RÉDUCTION DE LA DIMENSION STOCHASTIQUE D'UN MODÈLE MICROSCOPIQUE PAR ANALYSES DE SENSIBILITÉ .....</b>	<b>53</b>
<b>II.1 INTRODUCTION.....</b>	<b>54</b>
<b>II.2 LES MÉTHODES D'ANALYSE DE SENSIBILITÉ .....</b>	<b>54</b>
II.2.1 MÉTHODE DES NUAGES DE POINTS .....	55
II.2.2 MÉTHODES DE DÉCOMPOSITION DE VARIANCE .....	55
II.2.3 MÉTHODE « FOURIER AMPLITUDE SENSITIVITY TEST (FAST) ».....	55
II.2.4 MÉTHODE DE DÉVELOPPEMENT EN CHAOS POLYNOMIAL .....	56
II.2.5 MÉTHODE « ONE-AT-A-TIME (OAT) » .....	56
II.2.6 MÉTHODES LOCALES.....	56
II.2.7 MÉTHODE D'ANALYSE PAR RÉGRESSION .....	56
II.2.8 MÉTHODES DE « SCREENING » .....	57
II.2.9 CHOIX D'UNE MÉTHODE D'ANALYSE DE SENSIBILITÉ .....	57
<b>II.3 PRÉSENTATION DE LA MÉTHODE DE MORRIS .....</b>	<b>58</b>
II.3.1 TRAJECTOIRES ET EFFETS ÉLÉMENTAIRES (EE).....	58

II.3.2	INDICATEURS DE MORRIS ET SÉLECTION DE VARIABLES .....	60
II.3.3	ALGORITHME DE LA MÉTHODE DE MORRIS POUR SORTIES MULTIPLES.....	62
<b>II.4</b>	<b>VARIABLES D'ENTRÉE INDÉPENDANTES DU MODÈLE ET PLAGES DE VARIATION .....</b>	<b>64</b>
II.4.1	SYNTHÈSE DES RÉSULTATS DES ESSAIS ACCÉLÉRÉS SUR SONG LOULOU.....	64
II.4.2	RECALAGE DES PLAGES DE VARIATION .....	66
<b>II.5</b>	<b>ANALYSE DE SENSIBILITÉ EN CONDITIONS ACCÉLÉRÉES .....</b>	<b>69</b>
II.5.1	VOLUME DE GEL EN FONCTION DU TEMPS $V_g(T)$ .....	69
II.5.2	GONFLEMENT VOLUMIQUE EN FONCTION DU TEMPS $E_v(T)$ .....	72
II.5.3	VITESSE DE GONFLEMENT VOLUMIQUE EN FONCTION DU TEMPS $E'_v(T)$ .....	73
II.5.4	DIVERS POURCENTAGES DU GONFLEMENT MAXIMAL $\%E_{VMAX}$ .....	74
II.5.5	TEMPS POUR ATTEINDRE DIVERS POURCENTAGES DU GONFLEMENT MAXIMAL $T_{\%E_{VMAX}}$ .....	75
II.5.6	BILAN DES ANALYSES DE SENSIBILITÉS EFFECTUÉES EN CONDITIONS ACCÉLÉRÉES.....	76
<b>II.6</b>	<b>PASSAGE DES CONDITIONS ACCÉLÉRÉES AUX CONDITIONS ATMOSPHÉRIQUES .....</b>	<b>77</b>
II.6.1	EQUATIONS DE THERMOACTIVATION .....	77
II.6.2	VÉRIFICATION DE L'EFFET DE LA PRISE EN COMPTE DE LA THERMOACTIVATION .....	78
<b>II.7</b>	<b>ANALYSES DE SENSIBILITÉ EN CONDITIONS ATMOSPHÉRIQUES.....</b>	<b>80</b>
II.7.1	ANALYSES DE SENSIBILITÉ À 29 °C.....	80
II.7.2	ANALYSES DE SENSIBILITÉ À 10 °C.....	81
II.7.3	ANALYSES DE SENSIBILITÉ À LA TEMPÉRATURE VARIABLE DE SONG LOULOU .....	82
<b>II.8</b>	<b>SYNTHÈSE .....</b>	<b>83</b>
<b>CHAPITRE III - CONSTRUCTION DU MODÈLE DE SUBSTITUTION D'UN MODÈLE MICROSCOPIQUE .....</b>	<b>85</b>	
<b>III.1</b>	<b>INTRODUCTION .....</b>	<b>86</b>
<b>III.2</b>	<b>REVUE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LES MODÈLES DE SUBSTITUTION .....</b>	<b>86</b>
III.2.1	MÉTHODE DES SURFACES DE RÉPONSE QUADRATIQUES.....	87
III.2.1.1	Type de surfaces de réponse quadratiques.....	88
III.2.1.2	Plans d'expériences .....	88
III.2.2	MÉTHODES DES SURFACES DE RÉPONSE PAR POLYNÔMES DE CHAOS .....	89
III.2.2.1	Développement en chaos polynômial .....	89
III.2.2.2	Méthode de projection.....	91
III.2.2.3	Méthode de régression .....	92
III.2.2.4	Développement en chaos polynomial creux et adaptatif.....	92
III.2.3	ERREURS D'ESTIMATION .....	95
III.2.3.1	Coefficients $R^2$ et $R^2_{aj}$ correspondant à l'erreur empirique simple et ajustée.....	96
III.2.3.2	Coefficient $Q_{VC}^2$ correspondant à l'erreur de validation croisée explicite.....	96
III.2.3.3	Coefficients $Q_{LOO}^2$ et $Q_{LOOA}^2$ correspondant à l'erreur de validation croisée par Leave-One Out simple et ajustée.....	97
III.2.4	SYNTHÈSE .....	98
<b>III.3</b>	<b>CONSTRUCTION DU DCP POUR LA RAG EN CONDITIONS ATMOSPHÉRIQUES DE SONG LOULOU .....</b>	<b>98</b>
III.3.1	ALGORITHME DE CONSTRUCTION DU DCP ET DONNÉES .....	98
III.3.2	RÉSULTATS OBTENUS ET PROBLÈMES .....	100
<b>III.4</b>	<b>PROPOSITION D'UNE TECHNIQUE DE CONSTRUCTION DE MODÈLE DE SUBSTITUTION PAR DCP ET COMPOSITION DE FONCTION.....</b>	<b>102</b>
III.4.1	ALGORITHME DE CONSTRUCTION DE MODÈLE SUBSTITUTION PAR LA COMPOSITION DE FONCTION .....	102
III.4.2	ILLUSTRATION SUR DEUX EXEMPLES SIMPLES DE FONCTIONS DE FORME .....	103
III.4.2.1	Exemple d'une famille de fonctions de forme en racines carrées .....	103
III.4.2.2	Exemple d'une famille de fonctions de forme paraboliques .....	104
<b>III.5</b>	<b>APPLICATION À LA CONSTRUCTION DU MODÈLE DE SUBSTITUTION DU GONFLEMENT VOLUMIQUE D'UN VER DÛ À LA RAG .....</b>	<b>107</b>

III.5.1	MODÈLE DE SUBSTITUTION EN CONDITIONS ATMOSPHÉRIQUES DE SONG LOULOU .....	107
III.5.2	MODÈLE DE SUBSTITUTION EN CONDITIONS ACCÉLÉRÉES.....	111
<b>III.6</b>	<b>SYNTHÈSE .....</b>	<b>112</b>
<b>CHAPITRE IV - ANISOTROPIE DU GONFLEMENT DE RAG SOUS CHARGEMENT D'UNE ÉPROUVETTE .....</b>		<b>115</b>
<b>IV.1</b>	<b>INTRODUCTION.....</b>	<b>116</b>
<b>IV.2</b>	<b>REVUE BIBLIOGRAPHIQUE SUR L'ANISOTROPIE DE LA RAG.....</b>	<b>116</b>
IV.2.1	SYNTHÈSE DES TRAVAUX SUR LA RAG DU BÉTON SOUS CONTRAINTES.....	116
IV.2.2	FONCTION POIDS DE [SAOUMA & PEROTTI 2006] .....	118
IV.2.3	SYNTHÈSE .....	120
<b>IV.3</b>	<b>NOUVELLES EXPRESSIONS DE FONCTION POIDS .....</b>	<b>121</b>
IV.3.1	SCHÉMA DE LA PROPOSITION.....	121
IV.3.2	ALGORITHME DE CALCUL ET D'UTILISATION DE FONCTIONS POIDS DANS UN CODE EF .....	123
IV.3.3	COMPARAISON DES RÉSULTATS SUR NEUF EXEMPLES SIMPLES. ....	124
<b>IV.4</b>	<b>ÉPROUVETTE CYLINDRIQUE SUJETTE À UNE RAG ANISOTROPE .....</b>	<b>125</b>
IV.4.1	CINÉTIQUE DE GONFLEMENT VOLUMIQUE ISOTROPE DE RAG .....	125
IV.4.2	PRÉSENTATION DES CONFIGURATIONS ÉTUDIÉES EXPÉRIMENTALEMENT ET PAR CALCUL SOUS CAST3M .....	126
IV.4.2.1	<i>Eprouvette sous compression axiale de 0, 10 et 20 Mpa.....</i>	<i>127</i>
IV.4.2.2	<i>Eprouvette frettée avec un anneau en acier d'épaisseur 3 puis 5mm .....</i>	<i>129</i>
IV.4.2.3	<i>Eprouvette frettée avec un anneau en acier de 3 et 5mm et comprimée à 10MPa .....</i>	<i>132</i>
IV.4.2.4	<i>Eprouvette frettée avec un anneau en acier de 3 et 5mm et comprimée à 20MPa .....</i>	<i>133</i>
<b>IV.5</b>	<b>SYNTHÈSE .....</b>	<b>134</b>
<b>CHAPITRE V - CALCUL DE LA PROBABILITÉ DE BLOCAGE DE LA VANNE D'UNE PASSE D'ÉVACUATEUR DE CRUE DU BARRAGE DE SONG LOULOU.....</b>		<b>137</b>
<b>V.1</b>	<b>INTRODUCTION.....</b>	<b>138</b>
<b>V.2</b>	<b>CADRE GÉNÉRAL D'UNE ANALYSE FIABILISTE.....</b>	<b>139</b>
V.2.1	DENSITÉS DE PROBABILITÉ USUELLES EN FONCTION DU TYPE DE DONNÉES .....	140
V.2.2	TRANSFORMATIONS ISOPROBABILISTES.....	141
V.2.2.1	<i>Transformation de Rosenblatt.....</i>	<i>142</i>
V.2.2.2	<i>Transformation de Nataf.....</i>	<i>142</i>
V.2.2.3	<i>Transformation de Nataf généralisée à l'aide de copules .....</i>	<i>143</i>
<b>V.3</b>	<b>MÉTHODES POUR L'ANALYSE FIABILISTE .....</b>	<b>143</b>
V.3.1	MÉTHODES FORM/SORM.....	143
V.3.1.1	<i>Algorithme de Rackwitz-Fiessler.....</i>	<i>145</i>
V.3.1.2	<i>Méthode FORM .....</i>	<i>145</i>
V.3.1.3	<i>Méthode SORM .....</i>	<i>146</i>
V.3.2	MÉTHODES DE SIMULATION .....	147
V.3.2.1	<i>Méthode de simulation de Monte Carlo.....</i>	<i>147</i>
V.3.2.2	<i>Méthode de simulation stratifiée .....</i>	<i>148</i>
V.3.2.3	<i>Tirages d'importance.....</i>	<i>148</i>
V.3.3	SYNTHÈSE.....	149
<b>V.4</b>	<b>OUVRAGES EN BÉTON DE LA CENTRALE HYDROÉLECTRIQUE DE SONG LOULOU ATTEINTS DE RAG ..</b>	<b>150</b>
V.4.1	PRÉSENTATION DE L'AMÉNAGEMENT HYDROÉLECTRIQUE DE SONG LOULOU.....	150
V.4.2	JUSTIFICATION DU CHOIX DE L'ÉVACUATEUR DE CRUES .....	151
V.4.3	DONNÉES DE MODÉLISATION DE L'ÉVACUATEUR DE CRUES.....	151
<b>V.5</b>	<b>ANALYSE FIABILISTE DU BLOCAGE D'UNE VANNE D'ÉVACUATEUR DE CRUES .....</b>	<b>154</b>
V.5.1	MÉTHODOLOGIE MULTI-ÉCHELLE.....	154
V.5.2	FORMULATION DES MODES DE DÉFAILLANCE DE L'ÉVACUATEUR DE CRUES .....	155
V.5.2.1	<i>Modes de défaillance d'une passe vannée .....</i>	<i>155</i>

V.5.2.2 Etats limites de service et ultime considérés pour l'ensemble de l'évacuateur .....	157
V.5.3 CONSTRUCTION DES MODÈLES DE SUBSTITUTION DES DÉPLACEMENTS MAXIMUM .....	158
V.5.3.1 Constitution de la base de données des modèles de substitution de déplacements de la pile à partir de calculs sous Cast3M .....	158
V.5.3.2 Modèles de substitution des déplacements d'intérêt .....	161
V.5.3.3 Recalage des plages de variables aléatoires.....	163
V.5.4 ANALYSE FIABILISTE.....	165
V.5.4.1 Défaillance due au déplacement rive à rive de la rainure de la pile.....	165
V.5.4.2 Défaillance due au déplacement d'une console d'appui de la vanne .....	167
V.5.4.3 Défaillance d'une passe vannée due aux déplacements induits par la RAG .....	169
V.5.4.4 Défaillance de l'évacuateur de crues due aux déplacements induits par la RAG.....	170
<b>V.6 SYNTHÈSE .....</b>	<b>171</b>
<b>CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES .....</b>	<b>173</b>
<b>RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....</b>	<b>179</b>
<b>ANNEXES.....</b>	<b>194</b>
<b>ANNEXE A - INFORMATIONS COMPLÉMENTAIRES SUR LA RÉACTION ALCALI-GRANULAT .....</b>	<b>195</b>
<b>ANNEXE B - RÉSULTATS COMPLÉMENTAIRES DES ANALYSES DE SENSIBILITÉS .....</b>	<b>197</b>
<b>ANNEXE C - ÉLÉMENTS COMPLÉMENTAIRES DE CONSTRUCTION DU MODÈLE DE SUBSTITUTION DE RAG ..</b>	<b>213</b>
<b>ANNEXE D - ÉLÉMENTS COMPLÉMENTAIRES POUR LA PRISE EN COMPTE DE L'ANISOTROPIE DE LA RAG SOUS CHARGEMENT .....</b>	<b>225</b>
<b>ANNEXE E - INFORMATIONS COMPLÉMENTAIRES POUR L'ANALYSE DE FIABILITÉ DE L'ÉVACUATEUR DE CRUES DE SONG LOULOU .....</b>	<b>235</b>

## Liste des abréviations et symboles

Agg : Agrégat

DCP : Développement en chaos polynômial

EE : Effet Élémentaire

IF : Indice de Fissuration

MDS : Modèle de substitution

RAG : Réaction alcali-granulat

REV : Representative elementary volume

SL : Song Loulou

VER : Volume élémentaire représentatif

$C_{agg}$  : Fraction volumique de granulat (agrégat) dans le béton

$C_{Na(t)}$  : Concentration en alcalin à l'instant  $t$

$D$  : Coefficient de diffusion dans le granulat

$E$  : Module de Young du matériau

$E_A^{DiffG}$  : Energie d'activation de diffusion des alcalins dans la pâte de ciment

$E_A^{Fixna}$  : Energie d'activation de fixation des alcalins

$\varepsilon^\infty$  ou  $\varepsilon_{vMax}$  : Gonflement asymptotique ou gonflement volumique maximal

$\varepsilon_v(t)$  : Gonflement volumique au temps  $t$

$\varepsilon'_v(t)$  : Vitesse de gonflement au temps  $t$

$\% \varepsilon_{vMax}$  : Divers pourcentages du gonflement maximal

$t_{\% \varepsilon_{vMax}}$  : Temps pour atteindre divers pourcentages du gonflement maximal

$f$  ou  $Fixna$  : Coefficient de fixation d'alcalins

$f_c$  : Résistance à la compression

$f_t$  : Résistance à la traction

$G$  : Module de cisaillement

$K$  : Module d'élasticité isostatique

$M_{Na2O}$  : Masse d'alcalin équivalent par m<sup>3</sup> de béton

$M_{Na2O}^{mol}$  : Masse molaire d'alcalin équivalent

$Na_{th}$  : Seuil d'alcalins

$n_{g(t)}^{ai}$  : nombre de mole de gel crée pour une classe granulaire  $i$  au temps  $t$

$\nu$  : Coefficient de Poisson

$P_{agg}$  et  $P_{mor}$  : Porosité du granulat et du mortier

$\phi_{ai}$  : Fraction volumique de granulats réactifs de classe  $i$

$R$  : Constante des gaz parfaits

$R_{ai}$  : Rayon des granulats de classe  $i$

$S_r$  : Degré de saturation du béton

$\sigma$  : Contrainte

$T$  : Température

$t_c$  : Epaisseur de la porosité connectée

$\tau_c$  : Temps caractéristique

$\tau_L$  : Période d'accélération initiale ou période de latence

$V_{g(t)}$  : Volume total de gel crée

$V_{gel}^{mol}$  : Volume molaire de gel

## Liste des figures

Figure 0.1 : Méthodologie à compléter et mettre en œuvre.....	2
Figure I.1 : Eléments nécessaires à la mise en place des RAG .....	7
Figure I.2 : Synthèse des mécanismes de RAS admis adapté de [Godart & Le Roux 2008] .....	8
Figure I.3 : Hypothèses pour expliquer le gonflement dû à la RAS adapté de [Godart & Le Roux 2008] .....	9
Figure I.4 : Courbe typique de gonflement d'un béton adapté de [Larive 1997].....	14
Figure I.5 : Démarche de recalcul d'ouvrages atteints de RAG tirée de [Grimal 2007, Sellier <i>et al.</i> 2009] ..	21
Figure I.6 : Définition du volume élémentaire représentatif pour plusieurs tailles de granulats réactifs [ .....	47
Figure II.1 : Classification des méthodes d'analyse de sensibilité relativement à la complexité et au nombre de simulations du modèle [Iooss & Saltelli 2017].....	57
Figure II.2 : Exemple d'effets élémentaires pour $k=2, r=1, p=6 (\Delta=0,2)$ .....	58
Figure II.3 : Exemple d'effets élémentaires pour $k=2, r=5, p=6 (\Delta=0,2)$ .....	59
Figure II.4 : Utilisation de la moyenne absolue et l'écart-type pour la sélection de variables .....	61
Figure II.5 : Utilisation de l'indice de sensibilité global pour la sélection de variables.....	61
Figure II.6 : Eprouvettes extraites du barrage de SL pour essais LPC N°44, Guedon - IFSTTAR 2010.....	65
Figure II.7 : Résultats essais accélérés sur 10 échantillons prélevés dans le barrage.....	65
Figure II.8 : Cinétiques de gonflement Min- Moy et Max pour 10 000 tirages - $p=95\%$ - Plages initiales ..	66
Figure II.9 : Cinétiques de gonflement Min- Moy et Max pour 18 000 tirages - $p=95\%, 99\%, 100\%$ - Plages finales .....	67
Figure II.10 : Indice global de sensibilité cumulé de $V_g(t)$ à 365 jours en conditions accélérées .....	69
Figure II.12 : Fréquence ordonnée cumulée sur la somme des indices globaux de $V_g(t)$ sur diverses échéances en conditions accélérées .....	71
Figure II.13 : Classement des variables en fonctions de leur impact sur $\varepsilon_V(t)$ à diverses échéances en conditions accélérées.....	72
Figure II.14 : Fréquence ordonnée cumulée sur la somme des indices globaux de $\varepsilon_V(t)$ sur diverses échéances en conditions accélérées .....	72
Figure II.15 : Classement des variables en fonctions de leur impact sur $\varepsilon'_V(t)$ à diverses échéances en conditions accélérées.....	73
Figure II.16 : Fréquence ordonnée cumulée sur la somme des indices globaux de $\varepsilon'_V(t)$ sur diverses échéances en conditions accélérées .....	73
Figure II.17 : Classement des variables en fonctions de leur impact sur $\% \varepsilon_{Vmax}$ à divers pourcentages en conditions accélérées.....	74
Figure II.18 : Fréquence ordonnée cumulée sur la somme des indices globaux de $\% \varepsilon_{Vmax}$ sur divers pourcentages en conditions accélérées .....	74
Figure II.19 : Classement des variables en fonctions de leur impact sur $t_{\% \varepsilon_{VMax}}$ à divers pourcentages en conditions accélérées.....	75
Figure II.20 : Fréquence ordonnée cumulée sur la somme des indices globaux de $t_{\% \varepsilon_{VMax}}$ sur diverses échéances en conditions accélérées .....	75



Figure II.21 : Bilan des analyses de sensibilités effectuées en conditions accélérées.....	76
Figure II.22 : Températures et humidités relatives mensuelles sur la période 1975-2008.....	77
Figure II.23 : Distribution des statistiques sur le temps pour atteindre 7 pourcentages de $\varepsilon V_{Max}$ à 38 °C pour 18 000 tirages aléatoires.....	79
Figure II.24 : Distribution des statistiques sur le temps pour atteindre 7 pourcentages de $\varepsilon V_{Max}$ à 29 °C pour 10 000 tirages aléatoires.....	79
Figure II.25 : Bilan des analyses de sensibilité à 29 °C.....	81
Figure II.26 : Bilan des analyses de sensibilité à 10 °C.....	81
Figure II.27 : Bilan des analyses de sensibilité à la température variable de Song Loulou.....	82
Figure III.1 : Points échantillons (1) et modèle de substitution (2).....	87
Figure III.2 : Plans d'expériences pour deux Variables Aléatoires.....	89
Figure III.3 : Procédure itérative pour construire un DCP creux traduit de [Blatman 2009a].....	94
Figure III.4 : Procédure LAR pour construire un DCP creux traduit de [Blatman 2009a].....	95
Figure III.5 : Exemple d'illustration de la détermination des coefficients $R^2$ et $R^2_{aj}$ .....	96
Figure III.6 : Exemple d'illustration de la détermination du coefficient $Q_{VC^2}$ .....	97
Figure III.7 : Exemple d'illustration de la détermination des coefficients $Q_{LOO^2}$ et $Q_{LOOA^2}$ .....	97
Figure III.8 : Illustration de la procédure de constitution de la base de données de construction du DCP ..	100
Figure III.9 : Résultat type obtenu pour des DCP de Legendre d'ordre 2 (PCE2) et 3 (PCE3).....	101
Figure III.10 : Forme des données de l'exemple de fonctions racines carrées.....	103
Figure III.11 : Courbes des points de $MY_{3 \times 3}$ et matrice $MP_{3 \times 2}$ - exemple de fonctions racines carrées.....	103
Figure III.12 : Distribution croissante des paramètres $b_1$ et $b_2$ .....	104
Figure III.13 : Forme des données de l'exemple de fonctions paraboliques.....	105
Figure III.14 : Courbes des points de $MY_{6 \times 3}$ et matrice $MP_{6 \times 2}$ - exemple de fonctions paraboliques.....	105
Figure III.15 : Distribution croissante des paramètres $b_1$ et $b_2$ .....	106
Figure III.16 : Extrait de cinétiques obtenues avec le modèle [Multon <i>et al.</i> 2009].....	107
Figure III.17 : Répartition des trois paramètres $\varepsilon_{vMax}$ , $\tau_L$ , $\tau_C$ avec point d'inflexion à 45% de $\varepsilon_{vMax}$ .....	108
Figure III.18 : Répartition des 3 paramètres $\varepsilon_{vMax}$ , $\tau_L$ , $\tau_C$ – Levenberg-Marquardt.....	108
Figure III.19 : Répartition des 3 paramètres $\varepsilon_{vMax}$ , $\tau_L$ , $\tau_C$ – Levenberg-Marquardt t-5%.....	109
Figure III.20 : Sigmoïdes ajustées par 3 approches sur une courbe type donnée par le modèle de RAG....	109
Figure III.21 : Moyennes et écarts-type de l'erreur absolue des sigmoïdes ajustées sur 10000 cinétiques en conditions atmosphériques avec exclusion des 75 premières échéances.....	110
Figure III.22 : Moyennes et écarts-type de l'erreur absolue du modèle de substitution sur 10000 cinétiques en conditions atmosphériques.....	110
Figure III.23 : Moyennes et écarts-type de l'erreur absolue du modèle de substitution sur 10000 cinétiques en conditions accélérées.....	112
Figure IV.1: Eléments de déterminations des poids de [Saouma & Perotti 2006].....	119
Figure IV.2 : Cas de chargements et expressions des fonctions poids proposées.....	122
Figure IV.3 : Cinétique expérimentale de RAG approchée par le modèle de substitution.....	125
Figure IV.4 : Points de mesure sur l'éprouvette dans Cast3M.....	127

Figure IV.5 : Divers cas de compression uniaxiales étudiées (0, 10 et 20MPa).....	127
Figure IV.6 : Dépendance au maillage en gonflement libre .....	128
Figure IV.7 : Déformations transversales expérimentales et calculées sous chargements uniaxiaux (0, 10, 20 MPa).....	128
Figure IV.8 : Cas de frettages étudiés (3 et 5mm) .....	129
Figure IV.9 : Dépendance au maillage de la configuration 0MPa-3mm .....	130
Figure IV.10 : Déformations transversales expérimentales et calculées sous frettage (3 et 5mm) .....	130
Figure IV.11 : Déformations longitudinales expérimentales et calculées sous frettage (3 et 5mm) .....	131
Figure IV.12 : Contraintes de confinement expérimentales et calculées sous frettage (3 et 5mm) .....	132
Figure IV.13 : Epreuve frettée (3 et 5mm) et comprimée à 10MPa .....	132
Figure IV.14: Contraintes de confinement expérimentales et calculées sous frettage (3 et 5mm) et compression de 10MPa.....	133
Figure IV.15 : Epreuve frettée (3 et 5mm) et comprimée à 20MPa .....	133
Figure IV.16 : Contraintes de confinement expérimentales et calculées sous frettage (3 et 5mm) et compression de 20MPa.....	134
Figure V.1: Cadre général d'une analyse fiabiliste .....	140
Figure V.2 Méthodes FORM et SORM.....	144
Figure V.3: Illustration de $Pf_{FORM} \approx \Phi(-\beta)$ .....	145
Figure V.4 : Simulation de Monte Carlo dans l'espace physique .....	147
Figure V.5 : Synoptique d'ensemble de l'aménagement hydroélectrique de Song Loulou [ISL 2011] .....	150
Figure V.6 : Pile de l'évacuateur de crues de Song Loulou et ses 2 tirants modélisés sur Cast3M .....	152
Figure V.7 : Méthodologie pour l'analyse fiabiliste d'une structure à partir d'un modèle microscopique ..	154
Figure V.8: Rainure vanne (gauche) et console (droite) de l'évacuateur de crues de Song Loulou.....	155
Figure V.9 : Détails d'une rainure de vanne d'évacuateur de crue de Song Loulou .....	156
Figure V.10 : Dessin d'ensemble de l'évacuateur de crues .....	157
Figure V.11 : Points d'enregistrement des déplacements au cours du calcul Cast3M .....	158
Figure V.12 : Courbes de déplacements types aux principaux points de calcul.....	159
Figure V.13 : Répartition du déplacement maximal sur la console et la rainure.....	160
Figure V.14 : Histogrammes de fréquences des déplacements à 14 ans au point P2 – 1 000 000 de tirages.....	163
Figure V.15 : Cinétiques de déplacement Min-Moy-Max pour 1000 000 tirages - Plages initiales.....	164
Figure V.16 : Cinétiques de déplacement Min-Moy-Max pour 1000 000 tirages – Plages finales .....	164
Figure V.17 : Evolution de $Pf$ et $\beta$ pour le blocage dû aux déplacements des deux côtés de la rainure.....	166
Figure V.18 : Evolution de $Pf$ et $\beta$ pour le blocage dû au déplacement d'une console d'appui de la vanne .....	168
Figure V.19 : Evolution de la probabilité de défaillance système pour différentes configurations.....	169
Figure V.20 : Evolution de la probabilité de défaillance système pour différentes configurations.....	170
Figure B. 1: Classement des variables en fonctions de leur impact sur $V_g(t)$ diverses échéances à 29° C... ..	198
Figure B. 2: Fréquence ordonnée cumulée sur la somme des indices globaux de $V_g(t)$ sur diverses échéances à 29° C .....	198
Figure B. 3: Classement des variables en fonctions de leur impact sur $\varepsilon_V(t)$ diverses échéances à 29° C....	199

Figure B. 4: Fréquence ordonnée cumulée sur la somme des indices globaux de $\varepsilon_V(t)$ sur diverses échéances à 29° C.....	199
Figure B. 5: Classement des variables en fonctions de leur impact sur $\varepsilon'_V(t)$ à diverses échéances à 29 ° C 200	
Figure B. 6: Fréquence ordonnée cumulée sur la somme des indices globaux de $\varepsilon'_V(t)$ sur diverses échéances à 29° C.....	200
Figure B. 7: Classement des variables en fonctions de leur impact sur divers pourcentages de $\% \varepsilon_{VMax}$ à 29° C .....	201
Figure B. 8: Fréquence ordonnée cumulée sur la somme des indices globaux de $\% \varepsilon_{VMax}$ sur divers pourcentages à 29° C.....	201
Figure B. 9: Classement des variables en fonctions de leur impact sur le temps pour atteindre divers pourcentages $t_{\% \varepsilon_{VMax}}$ à 29° C .....	202
Figure B. 10: Fréquence ordonnée cumulée sur la somme des indices globaux du temps pour atteindre divers pourcentages $t_{\% \varepsilon_{VMax}}$ à 29° C .....	202
Figure B. 12: Fréquence ordonnée cumulée sur la somme des indices globaux de $V_g(t)$ sur diverses échéances à 10° C.....	203
Figure B. 13: Classement des variables en fonctions de leur impact sur $\varepsilon_V(t)$ à diverses échéances à 10 ° C .....	204
Figure B. 14: Fréquence ordonnée cumulée sur la somme des indices globaux de $\varepsilon_V(t)$ sur diverses échéances à 10° C.....	204
Figure B. 15: Classement des variables en fonctions de leur impact sur $\varepsilon'_V(t)$ à diverses échéances à 10° C .....	205
Figure B. 16: Fréquence ordonnée cumulée sur la somme des indices globaux de $\varepsilon'_V(t)$ sur diverses échéances à 10° C.....	205
Figure B. 17: Classement des variables en fonctions de leur impact sur divers pourcentages de $\% \varepsilon_{VMax}$ à 10° C .....	206
Figure B. 18: Fréquence ordonnée cumulée sur la somme des indices globaux de $\% \varepsilon_{VMax}$ sur divers pourcentages à 10° C.....	206
Figure B. 19: Classement des variables en fonctions de leur impact sur le temps pour atteindre divers pourcentages $t_{\% \varepsilon_{VMax}}$ à 10° C .....	207
Figure B. 20: Fréquence ordonnée cumulée sur la somme des indices globaux du temps pour atteindre divers pourcentages $t_{\% \varepsilon_{VMax}}$ à 10° C .....	207
Figure B. 21: Classement des variables en fonctions de leur impact sur $V_g(t)$ diverses échéances à la température variable de Song Loulou .....	208
Figure B. 22: Fréquence ordonnée cumulée sur la somme des indices globaux de $V_g(t)$ sur diverses échéances à la température variable de Song Loulou.....	208
Figure B. 23: Classement des variables en fonctions de leur impact sur $\varepsilon_V(t)$ diverses échéances à la température variable de Song Loulou .....	209
Figure B. 24: Fréquence ordonnée cumulée sur la somme des indices globaux de $\varepsilon_V(t)$ sur diverses échéances à la température variable de Song Loulou.....	209

Figure B. 25: Classement des variables en fonctions de leur impact sur $\varepsilon'_V(t)$ à diverses échéances à la température variable de Song Loulou.....	210
Figure B. 26: Fréquence ordonnée cumulée sur la somme des indices globaux de $\varepsilon'_V(t)$ sur diverses échéances à la température variable de Song Loulou .....	210
Figure B. 27: Classement des variables en fonctions de leur impact sur divers pourcentages de $\% \varepsilon_{VM_{\max}}$ à la température variable de Song Loulou.....	211
Figure B. 28: Fréquence ordonnée cumulée sur la somme des indices globaux de $\% \varepsilon_{VM_{\max}}$ sur divers pourcentages à la température variable de Song Loulou .....	211
Figure B. 29: Classement des variables en fonctions de leur impact sur le temps pour atteindre divers pourcentages du gonflement Max $t_{\% \varepsilon_{VM_{\max}}}$ à la température variable de Song Loulou .....	212
Figure B. 30: Fréquence ordonnée cumulée sur la somme des indices globaux du temps pour atteindre divers pourcentages $t_{\% \varepsilon_{VM_{\max}}}$ à la température variable de Song Loulou .....	212
Figure E. 1 : Dessin de définition d'une pile d'évacuateur de crues de Song Loulou.....	239
Figure E. 2: Arbre de défaillance pour « Défaillance de la vanne » adapté de [Patev <i>et al.</i> 2005 , Kalantarnia 2013].....	240
Figure E. 3 : Arbre de défaillance pour « Panne structurelle de la vanne » adapté de [Patev <i>et al.</i> 2005 , Kalantarnia 2013] .....	241
Figure E. 4 : Arbre de défaillance pour « Panne mécanique de la vanne » adapté de [Patev <i>et al.</i> 2005 , Kalantarnia 2013] .....	242
Figure E. 5: Arbre de défaillance pour « Panne électrique de la vanne » adapté de [Patev <i>et al.</i> 2005 , Kalantarnia 2013] .....	243
Figure E. 6 : Arbre de défaillance pour « Panne d'exploitation de la vanne » adapté de [Patev <i>et al.</i> 2005 , Kalantarnia 2013] .....	244
Figure E. 7 : Mésures de déplacements rive gauche – rive droite (-X) .....	245
Figure E. 8 : Mésures de déplacements amont-aval (-Y) .....	245
Figure E. 9 : Mésures de déplacements altimétriques (Z) .....	245

## Liste des tableaux

Tableau I.1 : Démarche de recalcul d'ouvrages atteints de RAG adaptée de [Fasseu <i>et al.</i> 2003] .....	17
Tableau I.2 : Propriétés thermiques du béton de masse adapté de [Saouma 2014].....	22
Tableau I.3 : Données de compression statique de 11 barrages adapté de [Mills-Bria <i>et al.</i> 2006].....	23
Tableau I.4 : Propriétés mécaniques de barrages de 0 à 60 ans et ceux de plus de 60 ans ne manifestant pas de RAG adapté de [Dolen 2005] .....	23
Tableau I.5 : Propriétés mécaniques de barrages atteints de RAS adapté de [Dolen 2005].....	24
Tableau I.6 : Seuil d'alcalin à ne pas dépasser pour les granulats PR.....	28
Tableau I.7 : Modèles décrivant l'observation de la RAS à l'échelle de la structure.....	36
Tableau I.8 : Modèles décrivant l'observation de la RAS à l'échelle du granulat .....	46
Tableau I.9 : Algorithme d'implémentation du modèle [Multon <i>et al.</i> 2009].....	49
Tableau II.1 : Algorithme de la méthode de Morris pour sorties multiples .....	63
Tableau II.2 : Plages de variations recalées des variables d'entrées du modèle [Multon <i>et al.</i> 2009] .....	68
Tableau II.3 : Fréquences cumulées sur la somme des indices de sensibilité globaux de $V_g(t)$ sur toutes les échéances .....	71
Tableau III.1 : Polynômes associés à chaque type de variable.....	90
Tableau III.2 : Algorithme de construction du Développement en Chaos Polynomial plein.....	99
Tableau III.3 : Format des données utilisées pour la construction des DCP de $\varepsilon_V$ .....	100
Tableau III.4 : Coefficients de qualité obtenus pour des DCP de Legendre d'ordre 2 (PCE2) et 3 (PCE3) .....	101
Tableau III.5 : Algorithme de construction d'un modèle de substitution temporel par la composition de fonction et le DCP .....	102
Tableau III.6 : Coefficients des DCP de $b_1$ et $b_2$ pour l'exemple de fonctions racines carrées.....	104
Tableau III.7 : Coefficients des DCP de $b_1$ et $b_2$ pour l'exemple de fonctions paraboliques .....	106
Tableau III.8 : Coefficients de qualité des DCP d'ordre 3 sur $\varepsilon_{Vmax}$ , $\tau_C$ , $\tau_L$ , en conditions atmosphériques .	111
Tableau III.9 : Coefficients de qualité des DCP d'ordre 3 sur $\varepsilon_{Vmax}$ , $\tau_C$ , $\tau_L$ , en conditions accélérées.....	111
Tableau IV.1 : Algorithme de détermination de fonctions poids à implémenter dans un code EF.....	123
Tableau IV.2 : Comparaison des valeurs de poids sur neuf exemples simples. ....	125
Tableau IV.3: Paramètres physiques permettant d'obtenir la cinétique expérimentale .....	126
Tableau V.1 : Lois de probabilités usuelles en fonction des usages ([Duprat 2013]) .....	141
Tableau V.2 : Paramètres portant l'aléa pour les calculs fiabiliste de la pile.....	153
Tableau V.3 : Format des données utilisées pour la construction des DCP des déplacements .....	161
Tableau V.4 : Rôle et facteur d'importance (%) des variables pour le blocage de deux côtés de la rainure	167
Tableau V.5 : Rôle et facteur d'importance (%) des variables pour le blocage dû à la console gauche .....	168
Tableau A.1: Outils d'investigation pour le diagnostic et le pronostic de RAS dans les structures en béton, adapté de [Fournier <i>et al.</i> 2010] .....	196
Tableau C. 1 : Coefficients du modèle de substitution de calcul de $\varepsilon_V(t)$ à la T° de Song Loulou (1/4).....	217
Tableau C. 2 : Coefficients du modèle de substitution de calcul de $\varepsilon_V(t)$ à la T° de Song Loulou (2/4).....	218
Tableau C. 3 : Coefficients du modèle de substitution de calcul de $\varepsilon_V(t)$ à la T° de Song Loulou (3/4).....	219

Tableau C. 4 : Coefficients du modèle de substitution de calcul de $\varepsilon_V(t)$ à la T° de Song Loulou (4/4) .....	220
Tableau C. 5 : Coefficients du modèle de substitution de calcul de $\varepsilon_V(t)$ en conditions accélérées (1/4).....	221
Tableau C. 6 : Coefficients du modèle de substitution de calcul de $\varepsilon_V(t)$ en conditions accélérées (2/4).....	222
Tableau C. 7 : Coefficients du modèle de substitution de calcul de $\varepsilon_V(t)$ en conditions accélérées (3/4).....	223
Tableau C. 8 : Coefficients du modèle de substitution de calcul de $\varepsilon_V(t)$ en conditions accélérées (4/4).....	224
Tableau E. 1 : Synthèse des données des ouvrages de Song Loulou.....	236
Tableau E. 2 : Extrait de l'analyse de risque de Song Loulou [ISL 2011] (1/2).....	237
Tableau E. 3 : Extrait de l'analyse de risque de Song Loulou [ISL 2011] (2/2).....	238
Tableau E. 4 : Coefficients du modèle de substitution du déplacement au point d'auscultation (1/7).....	246
Tableau E. 5 : Coefficients du modèle de substitution du déplacement au point d'auscultation (2/7).....	247
Tableau E. 6 : Coefficients du modèle de substitution du déplacement au point d'auscultation (3/7).....	248
Tableau E. 7 : Coefficients du modèle de substitution du déplacement au point d'auscultation (4/7).....	249
Tableau E. 8 : Coefficients du modèle de substitution du déplacement au point d'auscultation (5/7).....	250
Tableau E. 9 : Coefficients du modèle de substitution du déplacement au point d'auscultation (6/7).....	251
Tableau E. 10 : Coefficients du modèle de substitution du déplacement au point d'auscultation (7/7).....	252
Tableau E. 11 : Coefficients du modèle de substitution du déplacement maximal de la console (1/5).....	253
Tableau E. 16 : Coefficients du modèle de substitution de $U_{xmax}$ de la rainure (1/6) .....	258
Tableau E. 17 : Coefficients du modèle de substitution de $U_{xmax}$ de la rainure (2/6) .....	259
Tableau E. 18 : Coefficients du modèle de substitution de $U_{xmax}$ de la rainure (3/6) .....	260
Tableau E. 19 : Coefficients du modèle de substitution de $U_{xmax}$ de la rainure (4/6) .....	261
Tableau E. 20 : Coefficients du modèle de substitution de $U_{xmax}$ de la rainure (5/6) .....	262
Tableau E. 21 : Coefficients du modèle de substitution de $U_{xmax}$ de la rainure (6/6) .....	263

## Introduction générale

Les barrages sont des ouvrages très onéreux, associés à de forts enjeux économiques et industriels, dont il convient en conséquence de prolonger la durée de service autant que possible. Cette exigence passe par une bonne conception et une réalisation conforme, ainsi que par un bon suivi et une maintenance appropriée au travers d'outils de contrôle et d'aide à la décision efficaces. C'est ainsi que certains travaux de recherche ont été menés pour améliorer l'évaluation et le suivi de la sûreté structurale des barrages. L'une des deux approches proposées dans la littérature est de capitaliser les connaissances des experts pour l'évaluation de la performance structurale des barrages [Curt *et al.* 2010, Curt *et al.* 2011, Curt *et al.* 2017]. En effet, les experts sont particulièrement mis à contribution dans le suivi des barrages étant donné que la conception de ces derniers n'est encore que très partiellement couverte par les Eurocodes. L'autre approche, dont les résultats peuvent constituer des entrées de l'approche précédente, consiste à déployer la démarche probabiliste pour l'évaluation de la sûreté structurale des barrages [Westberg 2010, Westberg Wilde & Johansson 2012, CFBR 2017]. Il est à noter qu'il existe peu d'exemples de cette nature dans la littérature. Dans l'approche probabiliste, une description mathématique du mode de défaillance par une fonction d'état limite, dont les paramètres sont des variables aléatoires décrites par des distributions stochastiques, est nécessaire [Choi *et al.* 2004, Lemaire *et al.* 2005, Cremona 2011, Robert E. Melchers 2018]. L'indice de fiabilité est une mesure courante de cette dernière. La fonction d'état limite est évaluée un très grand nombre de fois dans la plupart des méthodes qui permettent de déterminer cet indice. Ainsi, pour un mode de défaillance donné, il est souhaitable d'avoir une fonction d'état limite dont l'évaluation est peu gourmande en temps de calcul. Les modes de défaillance faisant l'objet d'analyse de fiabilité concernent la plupart du temps des états limites ultimes. L'un des modes de dégradation qui, bien que se manifestant parfois après plusieurs dizaines d'années, affecte sévèrement le comportement en service des ouvrages en béton (majoritairement les barrages) est la réaction alcali-granulat (RAG). Cette réaction de gonflement interne du béton est due à l'attaque de la silice mal cristallisée des granulats réactifs par les alcalins  $\text{Na}^+$  et/ou  $\text{K}^+$  présents dans la pâte cimentaire. De nombreux barrages souffrent de cette pathologie sur les cinq continents [Sellier *et al.* 2017]. En 2000 en France, on a pu recenser plus de 400 ponts et barrages endommagés par des réactions de gonflement interne [Larive *et al.* 2000]. Au Cameroun, la RAG a été observée sur le barrage hydroélectrique de Song Loulou dès les années 80. Les gestionnaires de tels ouvrages, comme ENEO au Cameroun ou EDF en France, ont besoin d'outils de prévision performants pour un suivi optimal. La requalification des barrages atteints par RAG se fait généralement par l'utilisation d'un modèle macroscopique défini par calage de trois paramètres sur une loi sigmoïdale, en général la loi de [Larive 1997], sans prise en compte



explicite des paramètres physico-chimiques caractérisant la RAG. De plus, il n'existe pas, à notre connaissance, d'étude fiabiliste de barrages affectés par la RAG.

Cette thèse s'inscrit dans le sillage de travaux de recherche ayant eu pour but de cerner les mécanismes en présence dans la RAG et les paramètres dont elle dépend ([Dent Glasser & Kataoka 1981], [Poole 1992], [Larive 1997], etc.), d'élaborer des essais accélérés de caractérisation de la réactivité des granulats [Gao 2010], de recommander des mesures préventives [Fasseu *et al.* 2003], d'établir des modèles permettant de rendre compte de l'endommagement mécanique due à cette réaction chimique ([Sellier 1995], [Grimal 2007], [Multon *et al.* 2009], [Morenon 2017], etc.). L'apport de notre modeste pierre à l'édifice consiste à proposer une méthodologie d'évaluation de la fiabilité résiduelle d'ouvrages en béton sujets au gonflement interne dû à la Réaction Alkali-Granulat (RAG), dans l'optique d'une meilleure gestion de leur maintenance. Cette méthodologie multi-échelle (de l'échelle d'un volume élémentaire représentatif (VER) à l'échelle d'un ouvrage), sera validée par une application au cas du barrage de Song Loulou géré par ENEO, et pourrait aussi intéresser d'autres structures gérant des barrages atteints de RAG, comme EDF.

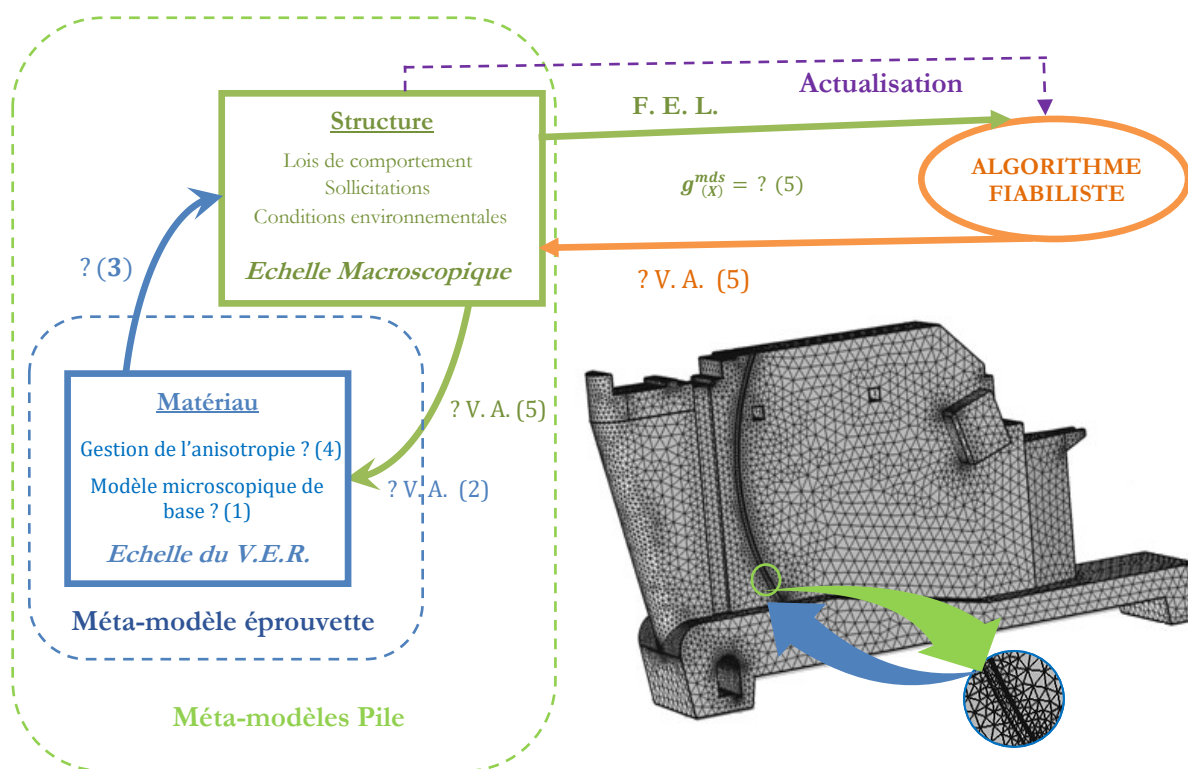


Figure 0.1 : Méthodologie à compléter et mettre en œuvre

Pour arriver à une méthodologie complète et éprouvée, nous passerons par cinq objectifs spécifiques desquels découleront chacun des cinq chapitres de cette thèse :

- (1) Sélectionner parmi les modèles de RAG proposés dans la littérature, un modèle qui rende bien compte des connaissances sur la RAG à partir de paramètres physico-chimiques.



- (2) Déterminer les paramètres dont la variabilité a une forte incidence sur la variabilité de la sortie pour réduire le nombre de paramètres à considérer comme aléatoires (dimension stochastique) dans la prise en compte des incertitudes.
- (3) Construire un modèle de substitution du modèle retenu pour réduire le temps de calcul.
- (4) Choisir ou proposer un moyen de prendre en compte l'anisotropie de la RAG sous chargement.
- (5) Déterminer la fiabilité d'un barrage atteint de RAG en s'appuyant sur des modèles de substitution construits à l'échelle de la structure.

Nous déroulerons le film de ce travail en cinq actes. Dans le premier chapitre, une présentation détaillée de la Réaction Alcali-Granulats (RAG) est réalisée sur les plans physico-chimique et phénoménologique. Ses effets sur le béton, en particulier sur celui des barrages, ainsi que les moyens de détection, prévention et réparation sont exposés. Une synthèse des différents modèles développés dans la littérature pour rendre compte des effets mécaniques de la RAG est effectuée. Bien que les modèles phénoménologiques soient les seuls utilisés à l'échelle de l'ouvrage, nous faisons le pari de choisir plutôt un modèle microscopique qui rend mieux compte de la RAG malgré sa complexité. C'est ainsi que le modèle de [Multon *et al.* 2009], s'appuyant sur des paramètres physico-chimiques clairs a été retenu pour être implémenté dans le cadre de notre méthodologie. Les équations ainsi que l'algorithme dudit modèle sont donnés. Cela permet de constater, qu'à l'instar des autres modèles physico-chimiques de la RAG, les paramètres du modèle de [Multon *et al.* 2009] (Tailles des granulats, concentration en alcalins, porosité du mortier, etc.), sont entachés d'incertitude ; une approche probabiliste est donc nécessaire. Cette dernière a la particularité, relativement au calcul déterministe, de nécessiter l'usage répété (de 100 à 10<sup>6</sup> fois) d'un modèle pour déterminer la probabilité de défaillance d'un ouvrage. Pour réduire les temps de calcul induits par cette approche, il est important de diminuer le nombre de variables aléatoires à considérer, d'où l'intérêt du chapitre II. Le second chapitre, porte donc sur la réduction de la dimension stochastique du modèle [Multon *et al.* 2009] à l'aide d'analyses de sensibilité. Après un bref tour d'horizon des méthodes d'analyse de sensibilité, la méthode de Morris est présentée dans le détail ainsi que son algorithme. Pour pouvoir l'appliquer à notre cas, les plages de variations des 20 paramètres du modèle sont déterminées à partir de la littérature et recalées sur les données de Song Loulou par simulation de Monte-Carlo. Puis, les analyses de sensibilité sont principalement effectuées en conditions de l'essai accéléré LPC N° 44 (38 °C, 100% d'humidité relative), et suivant les conditions naturelles de Song Loulou en température et humidité relative. Cela va permettre, dans le troisième chapitre, de construire un modèle de substitution du modèle microscopique de RAG ayant 9 variables aléatoires, les 11 autres étant fixées à leurs valeurs moyennes respectives par une méthode adaptée de la méthode du développement en chaos polynomial. En effet, dans ce chapitre, les calculs de divers types d'erreurs révéleront une mauvaise performance du modèle de

substitution obtenu par la méthode classique relativement au modèle microscopique de départ. Cela nous amènera à proposer et implémenter un modèle de substitution « hybride » dont la méthode de construction est basée sur la composition de fonction combinée à l'utilisation du développement en chaos polynomial. Sa validation à l'échelle de l'éprouvette nécessitant la prise en compte de l'anisotropie de la RAG en marge de notre modèle de substitution basé sur un modèle isotrope, nous allons procéder, en début de quatrième chapitre, à l'élaboration de fonction poids pour tenir compte de l'anisotropie du gonflement de RAG sous chargement à partir de la proposition de [Saouma & Perotti 2006]. Cette dernière ainsi que d'autres propositions de la littérature seront exposées et discutées avant la présentation des nouvelles fonctions poids proposées pour gérer l'anisotropie du gonflement de RAG. La comparaison des résultats obtenus après implémentation sous Cast3M aux valeurs déterminées expérimentalement par [Multon 2003, Multon *et al.* 2005], sur éprouvettes en béton atteint de RAG pressées axialement et/ou confinées par anneaux en acier, consacrera la validation des expressions proposées. Ainsi, le calcul de la probabilité de blocage de la vanne d'une passe d'évacuateur de crue du barrage de Song Loulou suite à la RAG pourra être abordé dans le dernier chapitre. Cela passera par la construction de divers modèles de substitution pour la fonction d'état limite, à partir de la méthode développée au chapitre III, et l'utilisation de méthodes d'analyse de fiabilité tels que les méthodes de Monte-Carlo, First Order Reliability Method et Second Order Reliability Method.

## CHAPITRE I

# La réaction alcali-granulat : Phénoménologie, gestion des ouvrages atteints et modélisations



<b>I.1</b>	<b>INTRODUCTION .....</b>	<b>6</b>
<b>I.2</b>	<b>PHYSICO-CHIMIE DE LA REACTION ALCALI-SILICE.....</b>	<b>7</b>
I.2.1	GENERALITES SUR LES REACTIONS ALCALI-GRANULAT .....	7
I.2.2	MECANISMES DE FORMATION DE GEL PAR LA RAS .....	8
I.2.3	HYPOTHESES SUR L'ORIGINE DES GONFLEMENTS CREES PAR LA RAS.....	9
I.2.4	INTERACTIONS ENTRE PARAMETRES MATERIAUX ET RAS.....	11
I.2.5	SYNTHESE .....	15
<b>I.3</b>	<b>LA RAG DANS LES BARRAGES.....</b>	<b>16</b>
I.3.1	LE RECALCUL DE BARRAGES ATTEINT DE RAG .....	17
I.3.2	SOLUTIONS PALLIATIVES DISPONIBLES .....	24
I.3.3	DISPOSITIONS PREVENTIVES .....	26
I.3.4	SYNTHESE .....	29
<b>I.4</b>	<b>MODELISATION DE LA RAS DANS LE BETON.....</b>	<b>30</b>
I.4.1	MODELISATIONS DES OBSERVATIONS A L'ECHELLE DE LA STRUCTURE .....	31
I.4.2	MODELISATIONS DES OBSERVATIONS A L'ECHELLE DU GRANULAT .....	37
I.4.3	LE MODELE [MULTON <i>ET AL.</i> 2009] .....	47
<b>I.5</b>	<b>SYNTHESE .....</b>	<b>50</b>

## I.1 Introduction

La réaction alcali-granulat (RAG) ou alcali-réaction (terminologie propre à la France) est une réaction délétère de gonflement interne du béton, dont les désordres engendrés sont imputables à un déséquilibre entre les minéraux présents dans les granulats et la solution interstitielle fortement alcaline du béton. La présence de réactions chimiques entre les ciments et certains granulats dans les bétons, fut observée pour la première fois aux États-Unis en 1935, par Holden. Cependant, c'est Thomas Stanton en 1940, qui le premier précisa la nature des réactifs en cause dans les dégradations observées sur des chaussées en Californie. Les symptômes visuels de la RAG recensés depuis lors sont : l'expansion différentielle des éléments en béton (provoquant déformations, mouvements relatifs, et déplacements), la fissuration surfacique, la décoloration de la surface autour des fissures, l'exsudation de gel, l'apparition de petits cratères (pop-outs). La RAG a actuellement été décelée dans la plupart des régions du monde [Sellier *et al.* 2017], dont la France depuis la fin des années 70 au sein de quelques barrages [Dron & Brivot 1992, 1993]. En 2000 en France, on a pu recenser plus de 400 ponts et barrages endommagés par des réactions de gonflement interne [Larive *et al.* 2000]. Au Cameroun, la RAG a été observée » sur le barrage hydroélectrique de Song Loulou dès les années 80. Les premiers modèles de RAG ont été proposés dans les années 50, et la compréhension des mécanismes réactionnels et d'endommagement a progressé avec la qualité des moyens expérimentaux d'observation des bétons affectés. Elle reste toutefois incomplète à l'heure actuelle du fait que la réaction dépende de paramètres très disparates. Ce sont entre autres, la nature hétérogène du béton, l'immense variété de granulats utilisés et de leur minéralogie, les multiples environnements dans lesquels se trouvent les ouvrages en béton. Il existe quelques recommandations pour se prémunir de cette pathologie, à l'instar des « recommandations pour la prévention des désordres dus à l'alcali-réaction » publiées par le LCPC en juin 1994, actualisées et remplacées par le fascicule de documentation [P18-464 2014]. Dans ce chapitre, nous présentons tour à tour :

- les généralités sur les réactions alcali-granulat,
- les mécanismes de formation de gels,
- les hypothèses sur l'origine des gonflements créés par la RAG,
- l'influence de divers paramètres sur la RAG,
- la démarche de recalcul des ouvrages affectés préconisée actuellement (avec indications d'essais et de données de retour d'expérience),
- les solutions palliatives proposées pour la maintenance des ouvrages atteints, ainsi que les dispositions préventives [Thomas *et al.* 2012],
- les modélisations décrivant les observations à l'échelle de la structure,
- celles décrivant les observations à l'échelle du granulat, en particulier le modèle [Multon *et al.* 2009] qui sera exploité dans les travaux présentés dans ce mémoire.

## I.2 Physico-chimie de la réaction alcali-silice

### I.2.1 Généralités sur les réactions alcali-granulat

Il existe trois types de RAG : la réaction alcali-silice, la réaction alcali-silicate et la réaction alcali-carbonate [Ollivier & Vichot 2008]. La réaction alcali-carbonate est plutôt mal nommée et se rapporte en fait à la réaction alcali-magnésium. La présence de dolomie ou de magnésite dans les granulats peut engendrer une réaction entre le carbonate de magnésium et la chaux qui donne lieu à la cristallisation de brucite, un hydroxide de magnésium dont le gonflement différé peut endommager le béton ( $\text{MgCO}_3 + \text{Ca}(\text{OH})_2 \rightarrow \text{CaCO}_3 + \text{Mg}(\text{OH})_2$ ). C'est le type de réaction le plus rare des trois et les gonflements qu'elle engendre sont moins importants que ceux des deux autres. La réaction alcali-silicate quant à elle survient lorsque les granulats du béton sont contaminés par la présence de minéraux argileux. Les granulats réactifs ici sont des silicates variés (phyllo-silicates, tecto-silicates, sains ou altérés). Les produits de cette réaction sont voisins de ceux de la réaction alcali-silice. Cette dernière est de loin la plus répandue et la plus étudiée si bien que dans la littérature, les RAG sont bien souvent réduites à la réaction alcali-silice (RAS). C'est également le cas dans ce travail.

Pour se produire, la réaction alcali-silice requiert trois conditions (Figure I.1) :

- ✚ le béton doit contenir suffisamment de granulats réactifs ;
- ✚ l'humidité relative du béton doit être supérieure à 80% ;
- ✚ le béton doit contenir une quantité d'alcalins suffisante (pouvant provenir de l'hydratation du ciment, de l'eau de gâchage, des adjuvants, de certains granulats, de sels fondants utilisés pour le dégel).

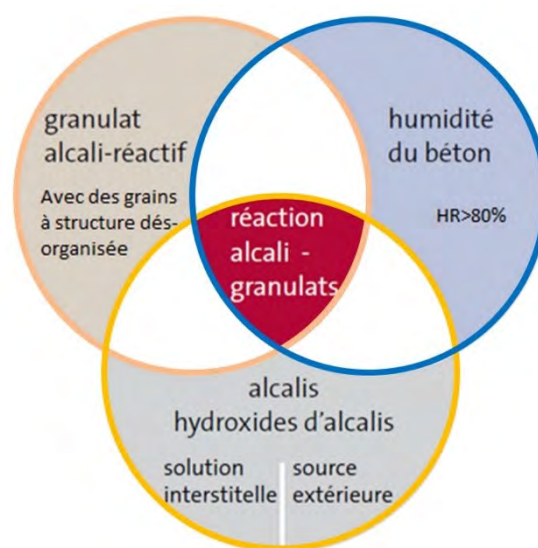


Figure I.1 : Éléments nécessaires à la mise en place des RAG

Notons qu'il existe des dispositions normatives pour quantifier la réactivité des granulats (ASTM C1260-C1293-C1567, Norme XP P18-594) afin d'ajuster la composition du béton (teneur en alcalins du ciment) pour se prémunir de la RAG.

La RAS conduit à la formation de gels silico-alcalins et/ou silico-calco-alcalins qui sont hydrophiles et créent un gonflement caractéristique, des fissurations, et entraînent la diminution des propriétés mécaniques du béton (résistance à la compression, à la flexion, modification du module d'Young). Nous verrons donc le mécanisme de la réaction, les hypothèses avancées pour expliquer le gonflement qu'elle engendre, ainsi que l'influence de divers facteurs sur son déroulement.

### I.2.2 Mécanismes de formation de gel par la RAS

Plusieurs mécanismes réactionnels sont proposés dans la littérature [Struble & Diamond 1981], [Dent Glasser & Kataoka 1981], [Wang & Gillott 1991], [Swamy 2002]. Nous présentons sur la [Figure I.2](#) la synthèse de ce qui fait globalement l'unanimité. Suivant cette synthèse, la réaction se produit en 4 phases ([Figure I.2](#)) :

- ✚ Phase 0 : Migration des ions réactants dans la pâte vers les sites de silice réactive.
- ✚ Phase 1 : Les ions hydroxyles attaquent des ponts siloxanes ( $\text{Si-O-Si} + 2\text{OH}^- \rightarrow 2\text{Si-O}^- + \text{H}_2\text{O}$ ) et des groupements silanols ( $\text{Si-OH} + \text{OH}^- \rightarrow \text{Si-O}^- + \text{H}_2\text{O}$ ).

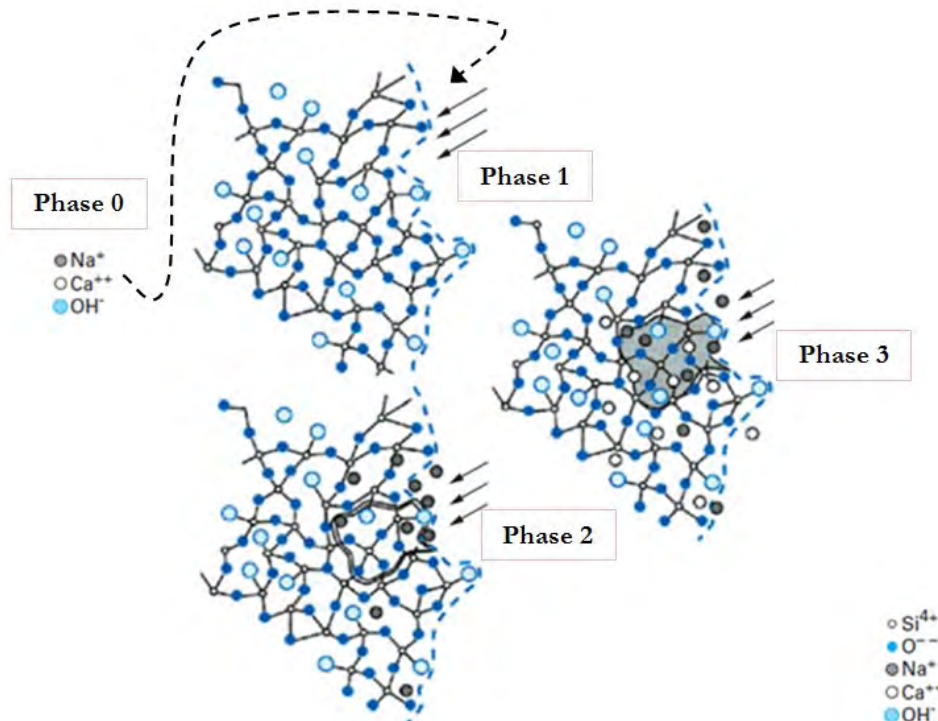
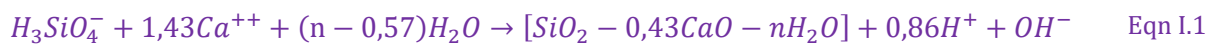


Figure I.2 : Synthèse des mécanismes de RAS admis adapté de [Godart & Le Roux 2008]



- ✚ **Phase 2** : Les charges négatives engendrées par ces attaques sont équilibrées par des alcalins, à savoir les cations sodium  $Na^+$  et potassium  $K^+$ , ( $Si - O^- + (Na^+, K^+) \rightarrow Si - O - (Na^+, K^+) + H_2O$ ), avec formation d'un gel silico-alcalin.
- ✚ **Phase 3** : Intégration des cations calcium  $Ca^{++}$  provenant de la solution interstitielle et de la dissolution de la portlandite  $Ca(OH)_2$ . Elle se produit souvent tardivement sur des structures réelles.

Un produit type (de formule moyenne supposée caractéristique) de l'intégration du calcium au gel, suivant les travaux de [Lombardi *et al.* 1997], peut s'écrire, selon [Larive 1997], sous la forme :



Les phases de 0 à 2 ont été proposées par [Dent Glasser & Kataoka 1981]. La phase 3 est une proposition de [Poole 1992] pour prendre en compte le rôle des ions calcium dans la réaction. Si cette synthèse fait plus ou moins l'unanimité dans la communauté scientifique, on ne peut pas en dire autant pour ce qui est des explications avancées sur l'origine des gonflements. L'essentiel des propositions faites à ce sujet est présenté dans le paragraphe suivant.

### I.2.3 Hypothèses sur l'origine des gonflements créés par la RAS

Diverses hypothèses (Figure I.3) sont avancées pour expliquer le gonflement des gels, sans qu'aucune d'entre elles ne fasse l'unanimité au niveau international.

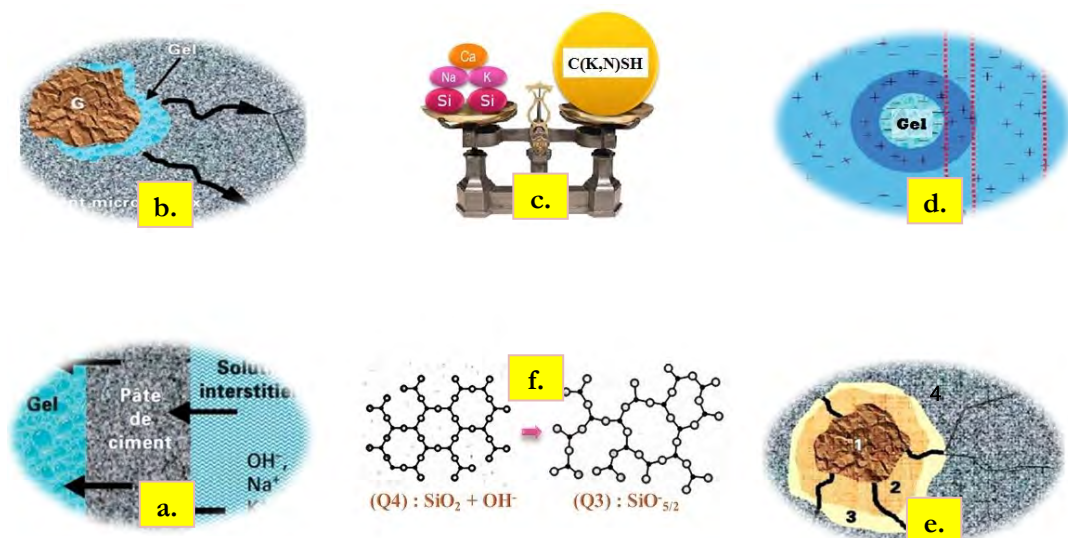


Figure I.3 : Hypothèses pour expliquer le gonflement dû à la RAS adapté de [Godart & Le Roux 2008]

Le détail de ces diverses hypothèses est donné dans les sous-paragraphe ci-après.

#### **I.2.3.1 Hypothèse des pressions osmotiques [Hanson 1944] [Glasser 1979]**

Initialement proposée par [Hanson 1944], elle est remise au goût du jour par [Glasser 1979], puis [Poole 1992]. Elle est illustrée sur la [Figure I.3-a](#) : le gel formé au contact pâte-granulat va drainer la solution interstitielle et voir son volume augmenter. Le flux liquide, source du gonflement, génère des pressions qui provoquent la fissuration.

#### **I.2.3.2 Hypothèse de la dissipation du gel [Jones 1988]**

Les deux étapes principales retenues par Jones sont l'hydratation du gel, puis la dissipation dans la pâte de ciment. Si la vitesse de dissipation est inférieure à la cinétique de formation (fonction des porosités du granulat et de la pâte), il se produit une expansion, puis des fissures (voir [Figure I.3-b](#)).

#### **I.2.3.3 Hypothèse des potentiels chimiques [Dron *et al.* 1998]**

Ces auteurs suggèrent que les différents ions réactants (silice, alcalins, calcium) se combinent dans la solution interstitielle de manière relativement homogène spatialement, et forment des précipités (C-(K,N)-S-H) dont la densité est inférieure à celle des réactifs consommés. [Dron & Brivot 1992] [Dron & Brivot 1993]. La [Figure I.3-c](#) en est une illustration.

#### **I.2.3.4 Hypothèse de la double couche électrique [Prezzi *et al.* 1997]**

Elle s'appuie sur la représentation de la [Figure I.3-d](#) ; les auteurs imputent le gonflement au phénomène de répulsion lié à la double couche (couche diffuse, et couche rigide de Stern, délimitées successivement par les pointillés rouges) formée autour des particules colloïdales de gel. Suivant le pH et la force ionique, la pression de gonflement peut atteindre 10 MPa.

#### **I.2.3.5 Hypothèse du gonflement des corps poreux [Couty 1999]**

Cette hypothèse est présentée sur l'élément e de [Figure I.3](#) : 1 représente le cœur du granulat encore sain (dont la taille diminue avec la réaction), 2 la partie externe du granulat devenue poreuse, 3 l'augmentation de volume de la zone 2 (gonflement), et 4 la pâte de ciment. Les zones 2 et 3 sont infiltrées par le gel qui va progresser dans la pâte et générer des fissures qui rejoindront un granulat proche.

#### **I.2.3.6 Hypothèse du gonflement granulaire des mines de DOUAI**

Bien que cette hypothèse soit différente des précédentes dans le fait qu'elle propose un gonflement non pas du gel formé par la réaction, mais du granulat lui-même par une transformation structurale de la silice [Garcia-Diaz *et al.* 2006], elle s'appuie tout de même sur le mécanisme réactionnel de [Dent Glasser & Kataoka 1981] et le mécanisme trans-solution de [Dron *et al.* 1998]. Dans la notation  $Q_n$  utilisée par les auteurs,  $n$  représente le nombre d'atomes d'oxygène qui forment un pont siloxane (c'est-à-dire reliés à deux atomes de silice) associés à



l'atome de silice Q considéré. [Bulteel *et al.* 2002] proposent une réaction en deux étapes. Lors de la première étape, les tétraèdres  $Q_4$  présents au départ sont transformés en tétraèdres  $Q_3$  (silanol) par l'attaque de ponts siloxanes ( $SiO_2 + OH^- \rightarrow SiO_{5/2}^-$ ), avec une variation de volume estimée à  $9 \text{ cm}^3$  par mole de silanols formés. Lors de la deuxième étape, il y a hydrolyse des sites silanols ionisés pour former un ion silicate ( $SiO_{5/2}^- + \frac{3}{2}H_2O \rightarrow H_3SiO_4^-$ ), qui peut précipiter sous la forme de C-S-H et C-(K,N)-S-H selon la nature physico-chimique du milieu. Si la vitesse de la première étape l'emporte sur la vitesse de la seconde, l'accumulation de tétraèdres  $Q_3$  dans le réseau siliceux va s'accompagner d'un gonflement chimique à la base du gonflement du granulat.

#### I.2.4 Interactions entre paramètres matériaux et RAS

Il est question dans ce paragraphe de regarder l'influence de divers paramètres caractéristiques du béton et de son environnement sur la RAS, puis l'impact de cette dernière sur les propriétés mécaniques du béton et de la structure.

##### I.2.4.1 Influence des caractéristiques des granulats

Les caractéristiques dont il est surtout question ici sont la taille et de la réactivité des granulats. [Sprung 1975] a montré que le gonflement des granulats siliceux du nord de l'Allemagne (silex) augmente avec le diamètre des granulats. En revanche, les résultats des études menées par [Diamond & Thaulow 1974] puis [Hobbs & Gutteridge 1979] montrent que le gonflement est d'autant plus important que le diamètre moyen des grains d'opale est petit. Dans le cas de verre recyclé, [Jin *et al.* 2000] ont plutôt constaté un effet pessimum de la taille des granulats. Les grains ayant des diamètres entre 1,18 et 2,36 mm provoquent le gonflement le plus important. Les auteurs expliquent cet effet pessimum par la différence de cinétique entre la formation des gels et leur perméation dans la porosité connectée. Plus les grains sont gros, plus la cinétique de la réaction est rapide, plus la pression générée est importante et plus la perméation des gels est rapide. Au-delà d'un certain diamètre (qui dépend des granulats et des propriétés de transport de la matrice) la perméation des gels est plus rapide que leur création et le gonflement résultant diminue. [Zhang *et al.* 1999] ont étudié un verre de quartz au moyen d'un essai en autoclave. Ils constatent que plus les grains sont petits et plus le gonflement obtenu à la fin de l'essai est important. Mais pour les gros granulats, l'expansion augmente de manière continue dans le temps. On peut donc dire que la taille a des effets différents en fonction du type de granulat et des conditions expérimentales.

Pour ce qui est de la réactivité, la classification des granulats (non réactifs, potentiellement réactifs, potentiellement réactifs à effet de pessimum) vis-à-vis de l'alcali-réaction peut être obtenue à partir d'essais dont la mise en œuvre et le déroulement sont présentés dans la norme expérimentale XP P18-594 de février 2004, à laquelle est associé le fascicule de documentation

P18-542 pour les spécifications. A l'issue de leur étude sur des granulats d'une part à réactivité rapide, et d'autre part à réactivité lente, [Ponce & Batic 2006] puis [Giaccio *et al.* 2008] constatent que, tandis que les granulats rapides subissent une dissolution graduelle depuis la surface, les granulats lents eux, subissent une dissolution plus localisée. Pour les premiers, une microfissuration apparaît dans les grains et s'étend progressivement à l'interface ou à la pâte de ciment. Dans le cas des granulats lents le gel a tendance à rester coincé dans les poches réactives et l'endommagement semble plutôt confiné aux granulats. Les échelles de temps plus longues, durant lesquelles la pâte de ciment peut fluer, peuvent expliquer l'absence de larges fissures. Jensen propose d'ailleurs une nouvelle classification de l'ensemble des RAG en fonction de la vitesse d'endommagement en trois catégories : alcali-réaction très rapide, alcali-réaction rapide, alcali-réaction lente [Jensen 2012]. La première catégorie, RAG très rapide, correspond à un endommagement en quelques jours en laboratoire, et englobe des roches contenant des inclusions microscopiques de quartz ou encore verre de silice volcanique. Le second groupe, RAG rapide, regroupe des minéraux comme l'opale, calcédoine, dans divers types de roches. Le mécanisme de gonflement principal est alors l'absorption d'eau par des gels. Le troisième groupe, RAG lente, correspond à un endommagement observé à partir d'au moins 10 ans pour des roches telles que des quartz microcristallins, quartz recristallisés dans diverses roches. Le mécanisme de gonflement n'est pas le même, il semble que le gonflement provienne de l'intérieur des granulats où se produisent des cristallisations, et non du gonflement d'un gel. En outre, ces granulats à réactivité lente ne produisent pas les effets de taille observés et étudiés sur les granulats rapides.

#### **I.2.4.2 Influence de la teneur en alcalin**

Plus la teneur initiale en alcalins est forte, plus le gonflement qui résulte de la RAG est important [Poyet 2003], [Naar 2009]. De nombreux travaux de recherche ont montré que la meilleure garantie pour empêcher le développement de la réaction était d'imposer que la teneur en alcalins actifs ne dépasse pas 3 kg par m<sup>3</sup> de béton [Godart & Le Roux 2008]. Toutes les sources de provenance des alcalins (ciment, eau de gâchage, adjuvants, sels fondants utilisés pour le dégel, certains types de granulats) doivent être prises en compte lors de la formulation de béton.

#### **I.2.4.3 Rôle de l'eau**

L'eau joue le rôle de réactif et celui de milieu réactionnel (transport et mise en contact des réactants), dans la réaction alcali-silice. L'expansion générée est directement corrélée à la prise de masse, plus elle est forte et plus l'amplitude du gonflement est importante. Sur les ouvrages, on peut observer des gonflements différentiels en fonction de la zone dans laquelle se situe le béton : sérieux gonflements en zone humide, mais peu ou pas en zone sèche. Une eau de gâchage en excès, et donc non consommée par les réactions d'hydratation, suffit à l'apparition de désordres ; d'où l'importance du rapport Eau/Ciment dans la formulation des bétons. Dans ses travaux, sur lesquels

s'appuie principalement ce sous-paragraphe, [Larive 1997] indique que si le béton perd plus de 0,15% de masse (soit plus de 15g d'eau par kg de béton), la réaction chimique est arrêtée. Cependant, elle pourrait reprendre s'il y a un apport d'eau ultérieur.

#### **I.2.4.4 Influence des porosités**

Les porosités de la pâte de ciment, de l'auréole de transition (Interface Transition Zone – ITZ) et du granulat ont un impact direct sur la vitesse de transport et de diffusion des réactifs d'une part, ainsi que sur la perméation du gel produit par la RAS. Une faible porosité limite la diffusion et le transport des réactifs, ce qui retardera l'apparition de la réaction ; mais en contrepartie elle jouera moins bien son rôle de vase d'expansion, ce qui entraînera des gonflements plus importants [Grimal 2007].

#### **I.2.4.5 Influence de la température**

[Larive 1997] a étudié le gonflement d'éprouvettes similaires aux températures de 23 et 38°C. Elle en a déduit que pour les granulats calcaires utilisés, la température a un effet purement cinétique qui peut être modélisé par une loi d'Arrhenius. Cet effet est l'une des pierres angulaires pour accélérer la réaction en laboratoire. En effet, alors qu'à température ambiante la RAS met plusieurs années à se manifester et plusieurs dizaines d'années à arriver à son terme, pour des températures plus élevées les déformations apparaissent rapidement (les essais d'expansion résiduelle normalisés durent 2, 20 ou 52 semaines). Typiquement, les essais en laboratoire se font pour des températures comprises entre 38 et 80°C.

#### **I.2.4.6 Courbe caractéristique de gonflement libre de béton**

Le gonflement en fonction du temps suit généralement une courbe sigmoïde (voir [Figure I.4](#)). Initialement, la réaction chimique se produit sans créer de gonflement, le temps que les produits de l'alcali-réaction remplissent la porosité du béton. Ensuite, les produits formés gonflent en absorbant plus ou moins d'eau et induisent un gonflement du matériau. Le béton se fissure alors, et crée des vases d'expansion pour les produits de réaction qui continuent à se former. Vers la fin, il est probable que le volume de fissures et de vides formé est plus grand que le volume des produits d'alcali-réaction formés, ce qui explique le ralentissement de l'expansion.

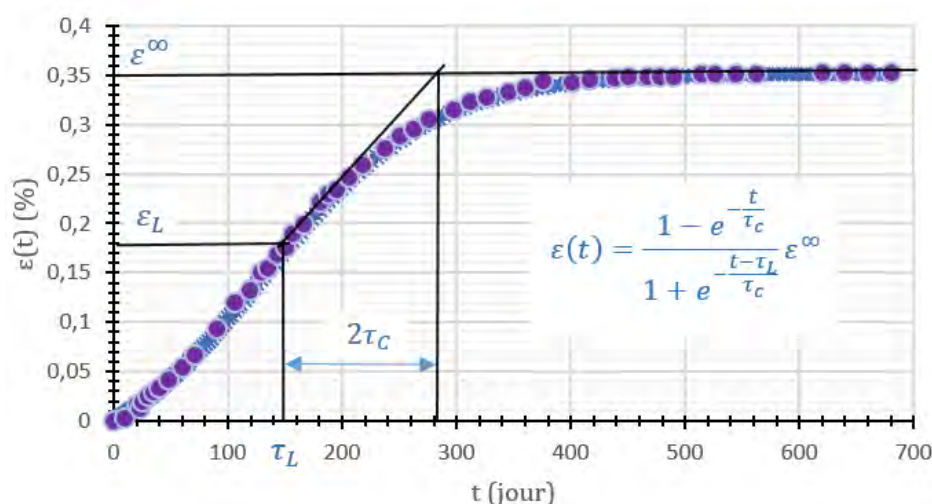


Figure I.4 : Courbe typique de gonflement d'un béton adapté de [Larive 1997]

De nombreux modèles macroscopiques de RAS s'appuient sur la loi de comportement tirée de la Figure I.4; avec :  $\tau_L$  la période d'accélération initiale ou période de latence,  $\tau_C$  le temps caractéristique,  $\varepsilon^\infty$  le gonflement asymptotique.

#### 1.2.4.7 Impact des contraintes sur le gonflement

Les contraintes d'origine mécanique sont sans influence sur la réaction chimique mais affectent les effets mécaniques de la RAS, en particulier son anisotropie. Il est en général admis qu'elles créent une redistribution des gonflements dans les directions les moins comprimées, ce qui a été constaté dans les travaux de [Larive 1997] et [Multon 2003]. Cependant [Dunant & Scrivener 2012] indiquent à contrario une diminution des gonflements volumiques aux très fortes compressions. Ceci est peut-être dû au fait qu'à partir de niveaux de contrainte de l'ordre de 20 MPa, le fluage joue un rôle significatif sur les déformations des éprouvettes et il devient bien plus difficile de tirer des conclusions quant aux effets des contraintes sur le gonflement dû à la RAS. Sur les structures en béton armé, le ferrailage constitue un élément clé à prendre en compte lors d'une évaluation de l'état limite de service [Multon *et al.* 2005]. Plus la structure est armée dans les trois directions, plus elle peut supporter le gonflement du béton. Par contre, si le ferrailage est insuffisant la RAS peut causer la rupture des armatures. Nous rappelons que les fissures observées sont en général alignées avec les directions principales de compression du béton. Nous approfondirons l'étude de l'anisotropie de la RAG sous chargement dans le chapitre 4.

#### 1.2.4.8 Conséquences mécaniques

Le module d'Young est la première caractéristique mécanique affectée par la RAS. Il diminue parfois même avant qu'une expansion significative soit observée [Swamy 2002]. La seconde est la résistance à la traction directe du béton qui peut chuter de moitié pour des déformations de l'ordre de 3 à 5 mm/m. La résistance en flexion peut être réduite de 75 %. Quant

à la résistance à la compression, elle se maintient généralement bien au début de la réaction, et il faut atteindre des déformations de l'ordre de 2 à 3 mm/m pour que celle-ci commence à diminuer. Sur les structures en béton armé, étant donné que le ferrailage passif n'a pas d'expansion propre, des contraintes spécifiques auto-équilibrées sont générées : les armatures sont soumises à des contraintes de traction et le béton à des contraintes de compression [Fasseu *et al.* 2003]. Ces contraintes auto-équilibrées peuvent être très élevées et entraîner des déformations plastiques des armatures (une barre de limite d'élasticité de 400 MPa entre dans le domaine plastique quand elle est soumise à une élongation moyenne de  $2 \cdot 10^{-3}$ ).

#### I.2.4.9 Propriétés du gel

Les propriétés du gel sont très disparates puisqu'elles dépendent de nombreux facteurs dont l'interaction est mal connue. Lorsque le gel est strictement silico-alcalin, il est fluide et suinte à la surface. Lorsqu'il incorpore du calcium, le plus souvent au fur et à mesure qu'il vieillit, sa viscosité augmente et son pouvoir dégradant aussi. Cette dernière dépend surtout du rapport Ca/Si. La plupart des travaux de caractérisation ont été effectués sur des gels synthétiques [Kawamura & Iwahori 2004], [Phair *et al.* 2005], [Moon *et al.* 2013]. Cependant, [Leemann & Lura 2013] ont déterminé la dureté Vickers et le module d'Young d'un gel réel par des essais de micro-indentation sur des échantillons de béton poli non séchés, prélevés sur une structure atteinte de RAS. Le test d'indentation et l'analyse chimique par MEB-DEX réalisés sur le gel dans différents granulats indiquent qu'il est relativement homogène. La dureté Vickers est comprise entre 10 et 19, et le module d'élasticité entre 7 et 9 GPa. Ces valeurs augmentent avec le taux de calcium dans le gel. Elles ne sont prises en compte que par le modèle de [Giorla 2013], voir § I.4.2.12.

#### I.2.5 Synthèse

Le mécanisme réactionnel de formation de gel de [Dent Glasser & Kataoka 1981], complété par [Poole 1992] est adopté par la grande majorité de la communauté scientifique. Les différentes hypothèses expliquant le gonflement induit par la réaction ont également été présentées. A part la proposition de la double couche de [Prezzi *et al.* 1997], qui a relativement peu d'écho dans la littérature, on peut dire que chaque proposition apporte un éclairage aux mécanismes de gonflement et de fissuration provoqués par la RAS. Toutefois, comme nous le verrons plus loin, l'hypothèse de [Jones 1988] est très utilisée dans la modélisation. Nous avons enfin présenté l'influence de divers paramètres sur la RAS, ainsi que son incidence sur les propriétés mécaniques et le comportement des structures affectées avec un accent sur son anisotropie, sur laquelle nous reviendrons au Chapitre 4. L'ensemble de ces connaissances constitue le socle des modélisations microscopiques de la RAS dans le béton, présentées dans le paragraphe I.4. Avant d'y arriver, une revue bibliographique de la gestion des ouvrages atteints, les barrages en particulier, est proposée.

Elle comprend, entre autres, des précisions sur les observations des effets de la RAS à l'échelle d'une structure sur lesquels s'appuient la construction des modèles macroscopiques également présentés dans le paragraphe 1.4.

### 1.3 La RAG dans les barrages

Après avoir été identifiée pour la première fois aux Etats-Unis en 1940, la réaction alcali-granulat a été observée un peu partout dans le monde : Australie, Nouvelle-Zélande, Afrique du Sud, Chine, Canada, Japon [ICOLD-CIGB 1991, Sellier *et al.* 2017, Sims & Poole 2017]. En Europe, le premier pays confronté à la RAG fut le Danemark, en 1950. Puis, l'Allemagne en 1965 et l'Islande furent sensibilisées très tôt à ce type de pathologie. À partir de 1975, la plupart des pays européens font état de cas de RAG. En France, c'est à la fin des années 70 que les premiers cas sont certifiés sur quelques barrages et, en 1987, sur plusieurs ponts. Selon [de Laleu 2000], à cette époque, EDF exploitait 508 barrages de tous types, dont 143 avec plus de 20 m de hauteur et 140 ayant une hauteur comprise entre 10 et 20 m. Au total, 165 barrages disposent d'un dispositif d'auscultation (piézomètres, nivellement, planimétrie, extensomètres, mesure de fuites, etc.) qui fait l'objet d'un suivi régulier et périodique. Parmi ces 165 barrages auscultés, 127 sont en béton (51 barrages-voûtes, 49 barrages poids, 12 barrages mobiles et 15 barrages de géométries diverses). Parmi ces derniers, 37, soit près de 30 %, montrent une évolution irréversible dont l'origine peut être attribuée à un gonflement de leur béton (allongement verticaux et/ou allongement de la longueur de crête). Il s'agit de 9 barrages poids, 25 barrages voûtes, 1 barrage voûtes multiples et 2 barrages mobiles. Quinze autres barrages poids montrent un léger basculement vers l'amont qui pourrait être attribué au gonflement mais l'absence de nivellement de la crête ne permet pas, à ce jour, de valider cette hypothèse. En dehors des effets sur les organes mécaniques (souvent sur les vannes d'évacuateurs de crues), les principaux mouvements irréversibles constatés, par les moyens habituels d'auscultation des comportements mécaniques (topographie, pendules), dépendent du type de barrage. Au Cameroun, les gonflements ont été observés sur le barrage hydroélectrique de Song Loulou dans les années 1980, pendant les premières années d'exploitation entre les deux phases de construction (de 1976 à 1981, puis de 1984 à 1988). La reconnaissance internationale de ce phénomène a entraîné la réalisation de nombreux programmes de recherche qui ont permis de préciser les mécanismes de réaction, d'élaborer des démarches préventives et de proposer des méthodes de diagnostic et de suivi des barrages. Nous présenterons ainsi les éléments de recalcul d'une structure atteinte, les solutions palliatives proposées actuellement, les dispositions préventives à la construction, ainsi que des indications concernant l'auscultation et le suivi préventif d'ouvrages atteints.

### I.3.1 Le recalcul de barrages atteint de RAG

Le recalcul de structures dégradées doit fournir aux gestionnaires un résultat quantitatif de l'évolution de la dégradation en évaluant le niveau de dégradation de l'ouvrage et la résistance résiduelle de ce dernier. Il doit aussi permettre de prévoir l'effet des interventions envisagées. Premièrement, nous faisons une synthèse de la démarche de recalcul proposée par [Fasseu *et al.* 2003] en indiquant les mesures permettant de recueillir les données nécessaires à ce recalcul, puis les plages de valeurs de certains paramètres tirées de [Saouma 2014]. Deuxièmement, nous présentons la démarche élaborée par le LMDC et EDF de [Sellier *et al.* 2009], pour mieux tenir compte des effets de l'avancement de la RAG dans les ouvrages âgés pour un recalcul plus réaliste.

#### I.3.1.1 Démarche de recalcul de l'IFSTTAR

Elle est synthétisée dans le [Tableau I.1](#) ci-après que nous avons réalisé en faisant une synthèse de la méthodologie de recalcul présentée dans [Fasseu *et al.* 2003]. Aux étapes constituant les différentes phases, nous avons indiqué les moyens d'obtention de l'information nécessaire (types d'essais, mesures, etc.) devant la désignation de l'étape, ainsi que les équations utilisées pour le calcul dans la cellule de droite correspondante. D'une manière générale, l'évolution du gonflement libre d'un béton atteint de RAG suit une courbe en « S », présentée à la [Figure I.4](#). Cette courbe, différente d'un béton à l'autre, est caractérisée, d'après une modélisation chemo-mécanique empirique, par trois paramètres :  $\varepsilon^\infty$  (amplitude maximale de gonflement correspondant au plateau supérieur du « S »),  $\tau_c$  (temps caractéristique lié à la pente de la courbe),  $\tau_L$  (temps de latence obtenu au point d'inflexion de la courbe). Ces paramètres dépendent des conditions ambiantes de température et d'humidité.

Tableau I.1 : Démarche de recalcul d'ouvrages atteints de RAG adaptée de [Fasseu *et al.* 2003]

Phases	Etapes	Equations
<b>a. Recueil des données</b>	i. Suivi de la structure (LPC n°47 + distancemétrie)	IF: $d_s(t)$ $t_0^s \leq t \leq t_1^s$
	ii. Essais d'expansion résiduelle (LPC n°44 à $\theta_{res} = 38^\circ\text{C}$ , $h_{res} = 100\%$ )	$\varepsilon_c(t) = \begin{cases} \text{inconnue} & 0 \leq t \leq t_0^c \\ \varepsilon_c(t_0^c) + \varepsilon_{res}(t) & t_0^c < t \leq t_1^c \end{cases}$
	iii. Investigation des conditions ambiantes (météo + sources Locales + Conditions initiale interne du béton)	$\theta_s(x, t), h_s(x, t)$ $0 \leq t, (x \in \Omega)$
<b>b. Exploitation des données</b>	iv. Recalcul thermo-hydrique de la structure (calcul de diffusion thermo-hydrique)	$\begin{cases} d_s(t) & t_0^s \leq t \leq t_1^s \\ \theta_s(x, t), h_s(x, t) & 0 \leq t, (x \in \Omega) \end{cases}$
	v. Conditions thermo-hydriques de la carotte	$\begin{cases} \theta_c(t), h_c(t) \\ \theta_s(x_c, t), h_s(x_c, t) & 0 \leq t \leq t_0^c \\ \theta_{res}, h_{res} & t_0^c < t \leq t_1^c \end{cases}$
<b>c. Calibrage du modèle</b>	vi. Calage au niveau de l'éprouvette	$[\varepsilon_0^\infty, \tau_c^0, \tau_L^0]^{(k)}, \varepsilon_c^{0,(k)}, k = 1 \dots n (n=10)$
	vii. Calage au niveau de la structure	$[\varepsilon_0^\infty, \tau_c^0, \tau_L^0]^{(k)}, \varepsilon_c^{0,(k)} / d_s^{cal,(k)}(t) \approx d_s(t)$
<b>d. Etude de la structure</b>	viii. Évaluation numérique structurale	Modèle macroscopique, ici [Li 2002]
	ix. Prédiction des effets de la RAS	Modèle macroscopique, ici [Li 2002]



Dans les modèles de RAS considérant cette courbe comme celle de la cinétique de la réaction, on est amené à considérer des valeurs dites de référence de ces paramètres, notées  $(\varepsilon_0^\infty, \tau_c^0, \tau_L^0)$ , qui correspondent à leur valeur à une température  $\theta_{res}$  de 38 °C et à une humidité  $h_{res}$  de 100 % (conditions de l'essai LCP n°44). Notons que **le choix du modèle macroscopique à utiliser dans le recalcul doit se faire dès le départ** car il intervient dans les calages au niveau de l'éprouvette, puis de la structure.

a. Recueil des données

Trois sources d'information au minimum sont nécessaires pour caractériser le déroulement du gonflement interne : le suivi du gonflement structurel *in situ*, le suivi de l'expansion résiduelle des carottes extraites de l'ouvrage (de préférence à cœur) et les conditions environnementales (température et humidité) dans lesquelles se trouve la structure étudiée.

i. Suivi du gonflement structurel : il s'agit des mesures de l'indice de fissuration (méthode LPC n° 47) et de distancemétrie. On les représente par  $d_s(t)$ , pour une période  $[t_0^s, t_1^s]$  allant de la date  $t_0^s$  de la première mesure structurelle à la date actuelle  $t_1^s$ .

ii. Essai d'expansion résiduelle : sont prises en compte les mesures d'expansion  $\varepsilon_c(t)$  des carottes extraites de la structure, suivies pendant une période normalisée  $[t_0^c, t_1^c]$  et aux conditions thermiques et hydriques recommandées  $(\theta_{res}, h_{res})$  (méthode LPC n° 44 : essai d'expansion résiduelle sur béton durci à 38°C et H.R.  $\geq 95\%$ ). Cet essai donne localement des indications sur le déroulement du gonflement interne au niveau du matériau de la structure.

iii. Conditions environnementales : il s'agit de préciser les conditions ambiantes de température  $\theta_s$  et d'humidité  $h_s$  auxquelles est soumise la structure. L'objectif est de reconstituer l'histoire thermique et hydrique complète  $\theta_s(x, t), h_s(x, t)$ , ces champs étant définis sur un domaine  $\Omega$  représentant l'ouvrage étudié. Sont donc concernées les conditions météorologiques ambiantes de la structure ainsi que les sources locales (thermiques et hydriques) auxquelles elle peut être exposée (arrivée d'eau, par exemple) et les conditions initiales internes régnant dans le béton.

b. Exploitation des données

iv. Recalcul thermo-hydriques de la structure : un calcul de diffusion thermo-hydrique exploitant les données de suivi de gonflement et les conditions environnementales permet de reconstituer la distribution thermo-hydrique de la structure :

$$\begin{cases} d_s(t) & t_0^s \leq t \leq t_1^s \\ \theta_s(x, t), h_s(x, t) & 0 \leq t, \quad (x \in \Omega) \end{cases} \quad \text{Eqn I.2}$$

v. Conditions thermo-hydrique de la carotte : La vie d'une éprouvette représentative extraite de la structure se compose de deux périodes : la partie *in situ*,  $0 \leq t \leq t_0^c$ , du coulage de la structure jusqu'à son extraction et la partie en laboratoire, pour  $t_0^c \leq t \leq t_1^c$ , durant laquelle elle est soumise



aux conditions thermo-hydriques de l'essai LPC n° 44. Ainsi, la totalité de l'histoire thermique et hydrique de la carotte se résume (les effets de la transition du site au laboratoire sont négligés car elle dure très peu de temps et l'éprouvette est conditionnée lors du transport) à :

$$\theta_c(t), h_c(t) = \begin{cases} \theta_s(x_c, t), h_s(x_c, t) & 0 \leq t \leq t_0^c \\ \theta_{res}, h_{res} & t_0^c < t \leq t_1^c \end{cases} \quad \text{Eqn I.3}$$

avec  $x_c$  la position du carottage.

### c. Calibrage des modèles

L'histoire du gonflement de l'éprouvette n'est que partiellement connue puisque pendant son séjour *in situ*,  $0 \leq t \leq t_0^c$ , du coulage de la structure jusqu'à son extraction, on ignore en général l'histoire de son gonflement ; et la partie en laboratoire, pour  $t_0^c \leq t \leq t_1^c$ , durant laquelle son gonflement  $\varepsilon_{res}(t)$  est mesurée à partir de  $\varepsilon_c(t = t_0^c)$  (valeur du gonflement au début de l'essai, *a priori* inconnue). Cela revient à écrire :

$$\varepsilon_c(t) = \begin{cases} \text{inconnue} & 0 \leq t \leq t_0^c \\ \varepsilon_c(t_0^c) + \varepsilon_{res}(t) & t_0^c < t \leq t_1^c \end{cases} \quad \text{Eqn I.4}$$

$\varepsilon_{res}(t)$  étant l'expansion résiduelle de cette éprouvette. Le terme  $\varepsilon_c(t_0^c)$  correspond à l'expansion déjà acquise par cette éprouvette à l'instant du carottage  $t_0^c$ .

Les équations Eqn I.2 à Eqn I.4 sont les informations utilisées pour déterminer  $(\varepsilon_0^\infty, \tau_c^0, \tau_L^0)$  pour le béton de la structure étudiée. Le problème est qu'elles ne fournissent pas les valeurs initiales  $\varepsilon_c(t_0^c)$ ,  $d_s(t_0^c)$ . On est donc obligé de procéder par calage. Le guide [Fasseu *et al.* 2003] propose un algorithme pour ce calage. Il se décompose en deux étapes : le calage au niveau de l'éprouvette, puis celui au niveau de la structure.

vi. Calage au niveau de l'éprouvette : A partir des conditions environnementales appliquées à la structure, un calcul de diffusion thermo-hydrique (réalisé, par exemple, à l'aide d'un logiciel d'éléments finis) permet de reconstituer l'histoire de la température et de l'humidité de l'éprouvette,  $\theta_c(t), h_c(t)$  de l'équation Eqn I.3. On cherche alors un groupe de paramètres  $[\varepsilon_0^\infty, \tau_c^0, \tau_L^0]$  avec un  $\varepsilon_c^0 (= \varepsilon_c(t_0^c))$  arbitraire à l'aide d'une méthode de type moindres carrés, de telle sorte que l'expansion calculée puisse approcher la déformation mesurée  $\varepsilon_c^0 + \varepsilon_{res}(t)$  pendant  $[t_0^c, t_1^c]$  avec une précision déterminée *a priori*. Cette procédure est répétée pour une série de  $\varepsilon_c^{0,(k)}, (k = 1 \dots n)$  afin d'obtenir un ensemble de triplets  $[\varepsilon_0^\infty, \tau_c^0, \tau_L^0]^{(k)}, k = 1 \dots n$  où  $n$  est le nombre de jeux de paramètres testés. Le choix de  $n$ , en général de l'ordre de 10, permet de retenir suffisamment d'ensembles  $[\varepsilon_0^\infty, \tau_c^0, \tau_L^0]^{(k)}, \varepsilon_c^{0,(k)}$  pour dégager par la suite un calibrage du modèle satisfaisant sans multiplier de façon exagérée le nombre de calculs à effectuer.

Lorsqu'on dispose de plusieurs éprouvettes d'expansion résiduelle, cette procédure est répétée, le triplet retenu à l'étape ultérieure pouvant notamment tenir compte de la confiance plus ou moins grande qu'on peut attribuer à la connaissance des conditions thermiques et hydriques

initiales, suivant les prélèvements. À ce titre, le prélèvement d'éprouvettes au moins situées à plus de cinq centimètres de la surface est à conseiller (moindre influence des fluctuations saisonnières).

vii. Calage au niveau de la structure : Pour chaque ensemble  $[\varepsilon_0^\infty, \tau_c^0, \tau_L^0]^{(k)}, \varepsilon_c^{0,(k)}$  de l'étape précédente, on effectue un calcul de la structure. Des résultats de ce calcul, on extrait la fonction  $d_s^{cal,(k)}(t)$  qui correspond au suivi structurel mesuré (fonction  $d_s(t)$  de l'étape (i)). On sélectionne alors le groupe numéro  $\hat{k}$  qui conduit à une fonction  $d_s^{cal,(\hat{k})}(t)$  la plus proche possible des valeurs connues de  $d_s(t)$ . C'est ce groupe-là qui sera utilisé dans le modèle de gonflement par la suite :

$$\left[ [\varepsilon_0^\infty, \tau_c^0, \tau_L^0]^{(\hat{k})}, \varepsilon_c^{0,(\hat{k})} \right] \text{ tel que } d_s^{cal,(\hat{k})}(t) \approx d_s(t) \quad \text{Eqn I.5}$$

#### d. Etude de la structure

Une fois calibré, le modèle peut être utilisé pour une évaluation complète de l'état mécanique de la structure affectée à l'aide d'un programme de calcul par éléments finis. En fait, il s'agit de faire un calcul de structure avec les paramètres trouvés lors de la phase de calibrage, en y introduisant l'histoire des sollicitations thermo-hydriques  $\theta_s(x, t), h_s(x, t)$  subies par l'ouvrage, en tenant compte des chargements mécaniques. Les résultats numériques fournissent alors l'évolution de l'état mécanique (contraintes, déformations, etc.) pour le passé, le présent et le futur. Un même calcul permet donc de faire un diagnostic et un pronostic. Il est également possible de valider l'effet mécanique de différentes techniques de réparation.

Divers modèles de RAS servant à décrire les observations à l'échelle de la structure s'appuyant sur la loi de Larive comme cinétique de gonflement peuvent être utilisés dans cette démarche. Toutefois, c'est le modèle de [Li 2002] qui est implémenté dans le guide [Fasseu *et al.* 2003], même si cela n'est pas explicitement indiqué.

##### I.3.1.2 Démarche de recalcul du LMDC et EDF

Elle est tirée des travaux de [Grimal 2007, Bourdarot *et al.* 2010, Multon & Sellier 2016, Sellier *et al.* 2016] et est résumé sur la [Figure I.5](#). Cette démarche reprend les trois grandes catégories d'outils disponibles à l'expertise : données issues de l'ouvrage (par échantillonnage et/ou suivi de structures), expérimentation en laboratoire (sur échantillons provenant de la carrière ou de l'ouvrage endommagé) et modélisation numérique. On s'intéresse globalement aux mêmes informations à l'échelle de la structure que dans la démarche précédente, à la différence qu'on s'assure d'avoir des échantillons de divers taux de saturation et divers types de béton. Au laboratoire, à l'aide de la méthode développée par [Gao, Cyr, *et al.* 2013b], on commence par récupérer les granulats des échantillons sans en modifier ni la composition chimique ni la granularité. Ensuite, la silice réactive résiduelle est évaluée soit par un essai de gonflement sur mortiers reconstitués utilisant des granulats réactifs broyés afin de quantifier indirectement la

silice réactive résiduelle [Grimal 2007, Sellier *et al.* 2009, Bourdarot *et al.* 2010, Gao 2010, Multon & Sellier 2016, Sellier *et al.* 2016], soit par une analyse chimique réalisée sur des poudres issues des granulats réactifs [Gao, Cyr, *et al.* 2013a].

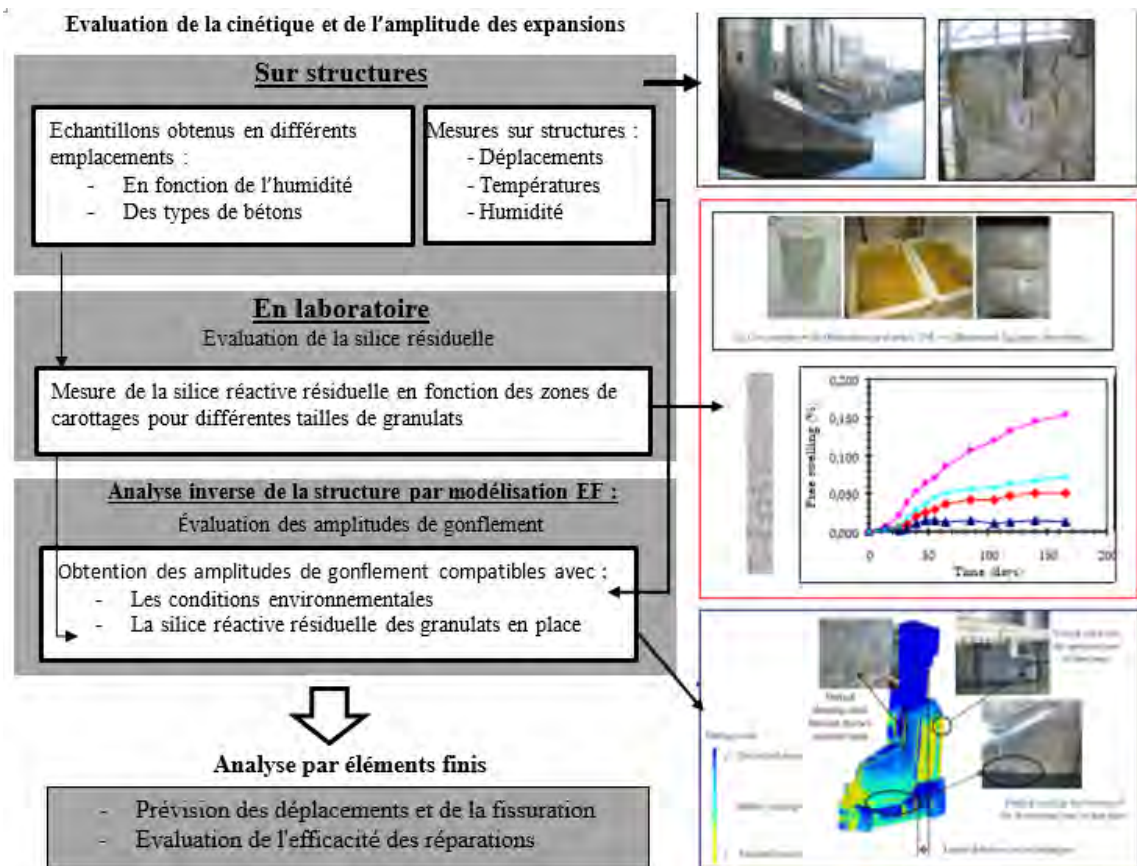


Figure I.5 : Démarche de recalcul d'ouvrages atteints de RAG tirée de [Grimal 2007, Sellier *et al.* 2009]

On peut alors évaluer l'avancement de la réaction (information équivalente au gonflement résiduel obtenu par l'essai LPC N°44), de manière simplifiée par le rapport entre la silice présente dans les granulats de différentes tailles et la silice présente dans ces granulats pas ou peu dégradés. Une analyse inverse de la structure permet de caler les paramètres du modèle macroscopique [Grimal 2007, Sellier *et al.* 2016], n'ayant pas encore été évalués, de manière à avoir une réponse compatible avec les mesures. Le modèle peut ensuite servir à prévoir les déplacements et la fissuration du béton ou évaluer l'efficacité des réparations.

### I.3.1.3 Essais pour le diagnostic et le suivi de la RAG

Il s'agit ici de présenter, de manière très synthétique, l'essentiel des tests et essais qui sont utilisés pour le diagnostic et le suivi d'ouvrage atteints de RAS, avec un accent particulier sur l'objectif principal de chacun d'entre eux. Ils sont regroupés dans le [Tableau A.1 en annexe A](#).

### I.3.1.4 Synthèse de données de retour d'expérience

Les données requises pour le recalcul de barrages atteints de RAG ont, de fait, une variabilité spatio-temporelle (d'ailleurs accentuée dans les ouvrages colossaux que sont les barrages), et sont entachées d'incertitudes. Il s'agit principalement du module d'Young, des contraintes de résistance à la compression, traction, du cisaillement à la rupture, du coefficient de Poisson, de la masse volumique comme données mécaniques du béton, de la diffusivité thermique, de la conductivité thermique, de la chaleur spécifique, du coefficient de dilatation thermique comme données thermiques du béton, de la température et de l'humidité relative comme données environnementales. Une variation dans les résultats des tests d'obtention de ces paramètres est inévitable en raison de plusieurs facteurs, entre autres la méthode de mise en place et le vieillissement du béton dans des conditions environnementales du site.

#### a. Propriétés thermiques du béton de masse

Les propriétés thermiques usuelles du béton de masse, utilisé dans les barrages en béton, sont données dans le chapitre 6 de [Saouma 2014]. Nous les avons regroupées sous forme de tableau. Les valeurs indiquées constituent une évaluation acceptable des valeurs moyennes.

Tableau I.2 : Propriétés thermiques du béton de masse adapté de [Saouma 2014]

Désignation	Symbole	Unité	Valeur
Diffusivité thermique	$h$	$m^2/hr$	$\in [0.003, 0.006]$
Conductivité thermique	$k$	$J/s.m.K$	$\approx 2,7$
Capacité thermique massique	$c$	$kJ/kg.K$	$\in [0.75, 1.17]$
Coefficient de dilatation thermique	$\alpha$	$m/m/^{\circ}C$	$\approx 10^{-5}$
Coefficient de convection de l'air	$h_{air}$	$W/m^2\ ^{\circ}C$	34
Coefficient de convection de l'eau	$h_{eau}$	$W/m^2\ ^{\circ}C$	100

#### b. Propriétés mécaniques d'échantillons provenant de 11 barrages

Le [Tableau I.3](#) répertorie les valeurs moyennes, maximales et minimales des résistances à la compression, module d'Young et déformations de onze barrages, issues d'une étude du bureau des réclamations du département de l'intérieur des Etats-Unis d'Amérique [Mills-Bria *et al.* 2006], et que nous avons consultée dans [Saouma 2014]. Les essais de compression ont été effectués sur des carottes de 15 cm de diamètre prélevées perpendiculairement à la surface supérieure des barrages et scellées dans du plastique pour conserver l'humidité constante pendant le transport. On constate une grande variabilité des données.

Tableau I.3 : Données de compression statique de 11 barrages adapté de [Mills-Bria *et al.* 2006]

Barrage	Moyenne			Maximum			Minimum		
	$f_c$ MPa	E GPa	$\varepsilon$ $\times 10^{-3}$	$f_c$ MPa	E GPa	$\varepsilon$ $\times 10^{-3}$	$f_c$ MPa	E GPa	$\varepsilon$ $\times 10^{-3}$
Deadwood	32,4	24,1	1,785	41,5	29,7	2,240	22,1	20,7	1,103
Elephant Butte	17,4	19,1	1,450	31,1	30,3	2,055	8,8	10,3	
Englebright	45,0	32,4		45,0	32,4				
Folsom	29,3	14,5		29,3	14,5				
Hoover	47,5	38,6		63,6	51,7	0,0293	14,5		
Monticello	30,5	35,6	1,183	40,1	49,6	1,400	41,9	26,9	
Pine Flat	26,8	26,9		26,8	26,9				
Roosevelt	37,3	37,9	1,175	48,8	55,2	1,625	28,2	18,6	
Seminole	24,1	11,7	0,951	36,4	22,4	2,880	15,6	6,9	
Stewart Mountain	34,8	26,9		46,0	40,0	0,0248	14,5		
Warm Springs	20,2	23,4		46,0	46,2		10,2	5,5	
Synthèse	31,4	26,2		63,6	55,2	2,880	8,8	5,5	

La série de tableaux ci-après est une adaptation de ceux qu'on peut trouver dans le rapport de retour d'expérience produit par [Dolen 2005], à partir de la base de données ACIS (Aging Concrete Information System) du bureau des réclamations du département de l'intérieur des Etats-Unis d'Amérique,

La résistance à la compression, le module d'Young, et le coefficient de Poisson moyens de carottes extraites de barrages en béton (non affectés par la RAG), ayant entre 0 et 60 ans, sont comparés à ceux de barrages centenaires dans le [Tableau I.4](#). Les moyennes sont pondérées par le nombre de tests pour un ensemble d'échantillons donné. Nous avons procédé à la traduction et à la conversion des unités au système international.

Tableau I.4 : Propriétés mécaniques de barrages de 0 à 60 ans et ceux de plus de 60 ans ne manifestant pas de RAG adapté de [Dolen 2005]

	Age moyen jrs (ans)	$f_c$ MPa	E GPa	$\nu$
Barrages en béton (0 à 60 ans)	10,418 (28,5)	38,54	37,37	0,18
Barrage de East Park	30,295 (83)	20,55	22,06	0,21
Barrages construits de (1902 à 1920)	29,100 (79,7)	17,17	17,86	0,23

A l'exception du coefficient de Poisson, on constate globalement une diminution des propriétés mécaniques des barrages de plus de 60 ans d'âge par rapport à ceux de 0 à 60 ans.

La résistance à la compression, le module d'Young, et le coefficient de Poisson moyens de carottes extraites de barrages en béton affectés par la RAS sont donnés dans le [Tableau I.5](#). Les moyennes sont pondérées par le nombre de tests pour un ensemble d'échantillons donné.

Tableau I.5 : Propriétés mécaniques de barrages atteints de RAS adapté de [Dolen 2005]

	Age au test jrs (ans)	$f_c$ MPa	E GPa	N
Barrages affectés par la RAS	19367 (53.1)	25.48	15.72	0.20
Carottes 6m en dessous du sommet	17512 (48.0)	21.93	14.41	0.20
Carottes 6m au-dessus de la fondation	17888 (49.0)	28.20	16.20	0.10
Barrages sains construits de (1902 à 1920)	29095 (79.7)	17.17	17.86	0.23

On constate sans surprise que les barrages affectés par la RAS ont un module d'Young plus faible que ceux bien portant, et ce malgré le fait qu'ils soient en moyenne plus jeunes (53.1 ans contre 79.7 ans). On remarque aussi que le confinement réduit l'effet délétère de la RAS. En effet, les propriétés des carottes prélevées vers le bas du barrage sont moins dégradées que celles des carottes prélevées vers le haut.

### I.3.2 Solutions palliatives disponibles

Il s'agit ici des actions qui ont été mises en œuvre, et dont certaines sont préconisées, pour corriger les effets nocifs de la RAG (gonflement, fissuration, etc.) sans y mettre un terme. Ce paragraphe s'appuie fortement sur le guide [Fasseu *et al.* 2003] et [Thomas *et al.* 2012].

#### I.3.2.1 Injection des fissures

Les premières tentatives de traitement des structures affectées par la RAG ont consisté à injecter les fissures, généralement à l'aide de résines époxydes. Elles se sont presque toutes soldées par des échecs du fait que les fissures se soient ré-ouvertes, ou que de nouvelles fissures soient apparues à proximité des fissures injectées [Thomas *et al.* 2013]. De fait, si la résine empêche l'entrée d'eau dans les fissures, elle ne protège nullement le reste des parements vis-à-vis de la pénétration d'eau ou d'humidité et ne le fait au niveau des fissures qu'à condition que le produit injecté ou utilisé en pontage soit suffisamment souple pour suivre l'ouverture future des fissures. De plus, l'injection ou le pontage des fissures n'ont aucune incidence sur les réactions en jeu, et n'apportent pas d'amélioration sensible de la résistance du béton au développement de la fissuration.

#### I.3.2.2 Application d'une peinture

L'application de peinture sur les ouvrages de génie civil en béton constitue la solution la plus simple à mettre en œuvre. Cependant, l'épaisseur totale du système de peinture est assez faible (au maximum 200 à 300 microns), et leur efficacité pour lutter contre les effets de la RAG est quasiment nulle dans la mesure où le système est perméable à la vapeur d'eau et relativement perméable à l'eau.



#### **I.3.2.3 Mise en œuvre de revêtement d'étanchéité**

L'application d'un revêtement d'étanchéité ayant généralement une épaisseur importante (quelques millimètres) constitue une autre voie de protection. Il agit sur la RAG en réduisant la pénétration de l'eau dans la structure. Un élément essentiel du choix des revêtements est leur capacité à suivre les gonflements supplémentaires des ouvrages, ainsi que leur caractéristique à avoir une élasticité suffisante au droit des fissures pour pouvoir suivre leurs ouvertures complémentaires éventuelles. La mise en place d'un revêtement étanche peut apporter un résultat positif à condition de faire appel à des systèmes suffisamment étanches (y compris à la vapeur d'eau), qui soient installés correctement et dans de bonnes conditions climatiques (période sèche).

#### **I.3.2.4 Amélioration du drainage**

Cette amélioration consiste sur un ouvrage à mieux canaliser l'eau de pluie pour empêcher qu'elle ne mouille les parties affectées. Il s'agit en général de rétablir les systèmes d'évacuation des eaux pluviales si ceux-ci sont défectueux. Bien que cette mesure soit plus ou moins efficace sur certaines structures dont l'apport en eau provient majoritairement de la pluie, elle n'est pas du tout pertinente pour les barrages.

#### **I.3.2.5 Application de composés de lithium**

Plusieurs études ont été publiées sur l'utilisation des composés de lithium pour traiter le béton fissuré par la RAG. Bien que le mécanisme de réduction des gonflements observé lors d'essais accélérés en laboratoire sur de petits échantillons ne soit pas entièrement compris, on pense généralement que les composés de lithium entrent dans le gel existant et réduisent sa capacité de gonflement. Cette solution s'est avérée inefficace sur le terrain principalement du fait que la profondeur de pénétration des produits de traitement est très faible (à peine quelques millimètres).

#### **I.3.2.6 Mise en œuvre d'armatures passives ou actives de renfort**

Cela consiste à renforcer une structure en fixant sur ses parements des aciers de renfort qu'on enrobe de béton projeté. Il est possible d'enserrer, de cercler, ou d'insérer des armatures passives ou actives (tendues à la mise en œuvre). Ces armatures sont essentiellement en acier, mais l'on peut effectuer des renforcements passifs avec des matériaux composites. Sous l'effet du gonflement de la structure qui se poursuit, le béton projeté armé se fissure et les armatures de renfort reprennent une partie des surtensions engendrées, soulageant ainsi les armatures incluses dans la structure d'origine. Etant donné que le gonflement du béton (et donc sa fissuration) se font préférentiellement selon les directions les moins précontraintes, un blocage tridimensionnel est recommandé. Compte tenu des efforts considérables générés par la RAG, il semble qu'il soit nécessaire d'appliquer des contraintes qui se situent dans une fourchette de 3 à 10 MPa.

### **I.3.2.7 Libération des contraintes par sciage**

Un autre type de traitement actif consiste à scier tout ou partie de la structure pour libérer (au moins temporairement) les contraintes dues à la RAG. Cette opération, déjà pratiquée avec succès par les Canadiens sur le barrage de Beauharnois dans la province de Québec dans les années 1980, a aussi été réalisée par EDF en France sur le barrage du Chambon où une libération des contraintes dans le haut du barrage s'imposait afin de diminuer l'effet d'arc-boutement du barrage sur les rives. Les saignées sont généralement verticales et sont effectuées au moyen d'un fil diamanté. La libération des contraintes présente une efficacité à court terme, mais elle nécessite souvent de reconduire l'opération dans la mesure où elle ne s'oppose pas à la poursuite de la réaction. Elle reste donc une solution applicable dans des cas bien particuliers, comme les ouvrages en béton non armé. Elle est parfois associée à la mise en œuvre d'un revêtement ou d'une membrane d'étanchéité.

### **I.3.2.8 Synthèse**

Les quatre premières solutions palliatives présentées ont pour but de réduire l'intensité de la réaction en limitant l'apport d'eau au béton. Seule la mise en œuvre de revêtement d'étanchéité, produit plus ou moins l'effet escompté. Elle est difficile à déployer sur les parties amont des barrages. Lorsque les fissures sont peu larges, on utilise très souvent les siloxanes, et en particulier les silanes, non seulement pour la RAG, mais aussi pour améliorer la résistance au gel et réduire la pénétration de chlorures (et donc réduire le risque de corrosion des armatures). L'application de composés au lithium visant à réduire la capacité de gonflement de gel de RAG et ayant donné des résultats prometteurs sur de petits échantillons soumis aux essais accélérés en laboratoire s'est avérée inefficace sur le terrain car la profondeur de pénétration des produits de traitement est très faible (à peine quelques millimètres). Les deux dernières solutions présentées visent plutôt à réduire les effets induits par la RAG. La libération des contraintes par sciage (souvent associée à la mise en œuvre d'une membrane d'étanchéité) est la solution la plus utilisée pour les structures massives que sont les barrages.

Sur un barrage atteint de RAG, il est nécessaire de mettre en place une organisation de la maintenance préventive (suivi), avant et après l'intervention palliative, pour anticiper tout scénario critique pour la sûreté du barrage et la sécurité des personnes et biens environnants.

## **I.3.3 Dispositions préventives**

Dans cette section, nous parlons des dispositions préventives à prendre, d'une part lors de la préparation et de la construction d'un nouvel ouvrage, d'autre part lorsqu'on a établi qu'un barrage est atteint de RAG (pour son suivi).



### I.3.3.1 Mesures préventives à la construction

Il existe dans les pays disposant d'un organisme de normalisation des normes indiquant les dispositions à prendre à la construction pour prévenir les phénomènes de RAG. Elles s'appuient sur des essais de qualification et de ceux de gonflement, pouvant varier selon les pays. [Wigum *et al.* 2006] ont recensé l'ensemble des essais utilisés dans les pays de l'Europe, ainsi que leurs principales caractéristiques. Les démarches préventives proposées suivent toutes, à quelques différences près, un même schéma. On commence par déterminer le niveau de prévention à atteindre pour l'ouvrage à construire. Ensuite, au besoin (pour deux des trois niveaux de prévention), on teste la réactivité des granulats qu'on compte utiliser. En fonction de ces deux informations, on choisit la solution à appliquer parmi les solutions contextuelles proposées par la norme. En France, les dispositions préventives pour la RAG sont actuellement indiquées par la norme [P18-464 2014]. Ici, le niveau de prévention à atteindre dépend de la catégorie de l'ouvrage et de la classe d'exposition de ce dernier vis-à-vis de la RAG en fonction des actions dues à l'environnement. La catégorie I rassemble les ouvrages (ou les parties d'ouvrages) pour lesquels les risques d'apparition de désordres sont faibles ou acceptables (les parties d'ouvrages aisément remplaçables peuvent être classées dans cette catégorie). Si ces risques sont peu tolérables, il s'agit de la catégorie II (englobe la plupart des bâtiments et ouvrages). La catégorie III, à laquelle appartiennent les barrages, correspond à des ouvrages dits exceptionnels vis-à-vis de la RAG pour lesquels les risques d'apparition des désordres sont inacceptables. Un tableau d'exemples d'ouvrages classés par catégorie de risque est donné dans la norme [P18-464 2014]. Ensuite, on doit classer l'environnement climatique dans lequel se trouvera l'ouvrage ou la partie d'ouvrage à construire entre trois classes d'exposition, fonction du degré d'hygrométrie, du lieu de construction et de l'apport d'alcalins extérieurs. En combinant les deux choix précédents, on choisit le niveau de prévention à appliquer à tout ou partie de l'ouvrage, parmi 3 niveaux désignés par les lettres A, B, C. Un tableau indicatif du niveau de prévention en fonction du risque et de la catégorie et de la classe d'exposition est donné dans un tableau de la norme [P18-464 2014]. Elle indique, par la suite, qu'on ne prend aucune précaution particulière vis-à-vis de la RAG pour un niveau de prévention A. Pour le niveau de prévention B, une formule de béton est acceptée s'il elle respecte au moins une disposition parmi quatre indiquées (en fonction des résultats des essais de classification de granulats FD P 18-542, et de ceux de l'essai de performance NF P 18-454, d'une formulation vis-à-vis de la RAG). Pour le niveau de prévention C, l'utilisation de granulats non qualifiés est proscrite (il faut absolument faire un test de qualification). L'utilisation de granulats reconnus potentiellement réactifs n'est autorisée que si l'approvisionnement en granulats non réactifs est particulièrement difficile, à condition de procéder à une étude approfondie de la formule envisagée, sur des bases expérimentales définies contractuellement. La norme [P18-464 2014] donne des indications sur la manière de mener une telle étude visant à déterminer le seuil

en alcalins déclenchant le gonflement. Elle conseille ensuite de prendre une marge de sécurité entre 1 et 2 kg/m<sup>3</sup> Na<sub>2</sub>O<sub>eq</sub> de moins sur le seuil, en fonction du caractère critique de la structure et de la variabilité des constituants utilisés tout au long de la construction. Le **Tableau I.6** donne le seuil en alcalins prescrit pour la formulation de béton contenant des granulats Potentiellement Réactifs (ou équivalent dans d'autres normes) de quelques pays.

Tableau I.6 : Seuil d'alcalin à ne pas dépasser pour les granulats PR

Canada, États-Unis d'Amérique, Danemark	<b>1.8 à 3.0 kg/m<sup>3</sup> Na<sub>2</sub>O<sub>eq</sub></b> , en fonction des informations sur la réactivité des granulats vis-à-vis de la RAG et le niveau de risque
France	<b>2.0 à 3.5 kg/m<sup>3</sup> Na<sub>2</sub>O<sub>eq</sub></b> , en fonction des informations sur le niveau de prévention et la variabilité des alcalins du ciment
Afrique du Sud	<b>2.0 à 4.5 kg/m<sup>3</sup> Na<sub>2</sub>O<sub>eq</sub></b> , en fonction des informations sur la réactivité des granulats vis-à-vis de la RAG
Nouvelle-Zélande	<b>2.5 kg/m<sup>3</sup> Na<sub>2</sub>O<sub>eq</sub></b>
Royaume-Uni	<b>2.5 à 5.0 kg/m<sup>3</sup> Na<sub>2</sub>O<sub>eq</sub></b> , en fonction des informations sur la réactivité des granulats vis-à-vis de la RAG
Belgique, Chine, Japon, Russie	<b>3.0 kg/m<sup>3</sup> Na<sub>2</sub>O<sub>eq</sub></b>
Irlande	<b>4.0 kg/m<sup>3</sup> Na<sub>2</sub>O<sub>eq</sub></b> ou 4.5 kg/m <sup>3</sup> Na <sub>2</sub> O <sub>eq</sub> si les granulats réactifs sont des roches carbonifères

Nous rappelons que le bilan en alcalins à comparer au seuil prescrit (en moyenne 3 kg/m<sup>3</sup> Na<sub>2</sub>O<sub>eq</sub>) doit tenir compte de toutes les sources d'alcalins potentielles sur l'ouvrage.

Les dispositions préventives que nous venons de voir concernent les ouvrages à construire. Pour ce qui est des ouvrages existant sur lesquels la RAG s'est manifestée, sur les barrages en particulier, il est très souvent nécessaire de mettre en place des dispositifs d'auscultation supplémentaire et organiser des inspections pour leur suivi préventif.

### I.3.3.2 Auscultation et suivi préventif de barrages atteints de RAG

Les barrages sont généralement dotés d'un dispositif d'auscultation « ordinaire » constitué d'instruments de mesures de déformations (pendules, extensomètres, etc.), de percolations (déversoirs, canal de mesures, etc.), de pressions interstitielles et de sous-pression (piézomètres, manomètres, etc.). Cependant, le suivi d'un barrage atteint de RAG peut nécessiter l'ajout d'une instrumentation supplémentaire pour la mesure de l'évolution de : l'ouverture de fissure, la déformation (plus précise), l'humidité relative et la température.

L'ouverture de fissure est suivie via l'Indice de Fissuration (IF) obtenu par la mesure et la somme des largeurs des fissures le long d'une série de lignes tracées perpendiculairement à la surface de l'élément de béton contrôlé. On peut le faire à l'aide d'un fissuromètre gradué (avec une loupe au besoin), ou par macrophotographie numérique. Le suivi dimensionnel peut se faire à

l'aide d'un distancemètre orientable à fil d'invar, ou par distancemétrie infrarouge, ou encore par planimétrie laser [Thomas *et al.* 2013]. L'humidité relative et la température ambiantes peuvent être obtenues par thermo-hygromètre, ou par une mini station météo. Sur site, l'humidité peut être mesurée en surface ou en profondeur à l'aide de différentes techniques (bâton en bois, sondes portables ou permanentes, etc.). On peut déterminer l'évolution des fissures internes par des mesures de signaux périodiques (vitesse d'impulsion, écho d'impact, méthodes acoustiques, etc.) effectuées sur des zones spécifiques de la structure concernée, en surface ou dans le fond de trous percés dans la structure. Les systèmes à fibre optique et corde vibrante peuvent également être utilisés pour la mesure de déformation (et même de la Température et de l'humidité relative), avec la possibilité de transmettre les données automatiquement vers un ordinateur pour un traitement ultérieur. Ces techniques sont plus détaillées dans : [Fournier *et al.* 2010], [Thomas *et al.* 2013]. Les mesures sont effectuées de manière périodique et doivent alimenter une base de données permettant de suivre le barrage atteint de RAG et de décider des actions à mener en fonction de seuil. On peut également se servir du recalcul en prédiction du comportement du barrage sujet à la RAG pour améliorer le suivi et la prise de décision. Au besoin, on peut effectuer des essais de laboratoire présentés précédemment pour avoir une image plus nette de l'état d'avancement de la réaction.

#### I.3.4 Synthèse

Dans cette section, nous avons présenté la méthode de calcul d'ouvrage atteint de RAG proposée par l'IFFSTAR [Fasseu *et al.* 2003]. Elle consiste à partir de mesures d'indices de fissuration effectuées sur des points remarquables du site, des résultats d'essais de gonflement libre résiduel, et de l'établissement des conditions ambiantes du barrage, à reconstituer l'histoire thermo-hydrrique du barrage, caler un modèle de cinétique de gonflement basé sur la loi de [Larive 1997], et procéder au calcul de structure tenant compte de la RAG. Nous avons indiqué les essais et tests permettant d'obtenir les données nécessaires pour ce recalcul. Dans la même lancée, nous avons présenté quelques données matériaux du retour d'expérience de barrages affectés par la RAG aux États-Unis d'Amérique [Dolen 2005], ainsi que des valeurs de paramètres thermo-hydrriques utilisés dans le recalcul [Saouma 2014]. La démarche de recalcul présentée sert à la fois pour le diagnostic et le pronostic de la RAG dans les barrages. Dans la suite logique du processus de prise en main d'un ouvrage malade, nous avons présenté les solutions palliatives qui ont été élaborées pour réduire l'effet délétère de la RAG, et nous les avons commenté suivant le retour d'expérience présenté dans [Fasseu *et al.* 2003], [Thomas *et al.* 2012], [Thomas *et al.* 2013]. Les quatre premières solutions palliatives présentées (injection des fissures, application d'une peinture, mise en œuvre de revêtement d'étanchéité, amélioration du drainage) ont pour but de

réduire l'intensité de la réaction en limitant l'apport d'eau au béton. Seule la mise en œuvre de revêtement d'étanchéité, de matériau et d'épaisseur adéquats, produit plus ou moins l'effet escompté. Elle est difficile à déployer sur les parties amont des barrages du fait de la présence quasi permanente d'eau. Lorsque les fissures sont peu larges, on utilise très souvent les siloxanes, et en particulier les silanes, non seulement pour la RAG, mais aussi pour améliorer la résistance au gel et réduire la pénétration de chlorures (réduire le risque de corrosion des armatures). L'application de composés au lithium visant à réduire la capacité de gonflement de gel de RAG et ayant donné des résultats prometteurs sur de petits échantillons soumis aux essais accélérés en laboratoire s'est avérée inefficace sur le terrain car la profondeur de pénétration des produits de traitement est très faible (à peine quelques millimètres). Les deux dernières solutions présentées (mise en œuvre d'armatures de renfort, libération des contraintes par sciage) visent plutôt à réduire les effets induits par la RAG. La libération des contraintes par sciage (souvent associé à la mise en œuvre d'une membrane d'étanchéité) est la solution la plus utilisée pour les structures massives que sont les barrages. Nous avons ensuite brièvement présenté l'instrumentation et la démarche du suivi préventif de barrages atteints de RAG. Nous avons terminé cette section en évoquant les mesures préventives à observer à la construction de nouveaux ouvrages. Elles sont indiquées dans des textes normatifs, notamment [P18-464 2014], pour la France. Elles consistent pour l'essentiel à adopter un taux d'alcalins inférieur à une valeur seuil (en moyenne  $3 \text{ kg/m}^3 \text{ Na}_2\text{O}_{\text{eq}}$  pour de nombreux pays) qui est déterminée en fonction du niveau de prévention défini pour l'ouvrage, la nature des granulats utilisés et le bilan en source d'alcalins.

#### **I.4 Modélisation de la RAS dans le béton**

Plusieurs chercheurs ont proposé des modélisations de la RAS en s'appuyant sur certains des aspects présentés précédemment (§ I.2 principalement pour les modélisations microscopiques, et § I.3 pour les modèles macroscopiques principalement). Ces modèles ont été regroupés différemment à l'occasion de synthèses bibliographiques de thèse ou d'articles de synthèse [Poyet 2003, Grimal 2007, Naar 2009, Pan *et al.* 2012, Charpin 2013, Giorla 2013, Esposito & Hendriks 2017]. Dans ce paragraphe, ils sont regroupés en deux grandes familles, à savoir, les modélisations des observations à l'échelle de la structure, et les modélisations des observations à l'échelle du granulat (qui va jusqu'à la taille de l'éprouvette). Nous commençons par faire une synthèse assez exhaustive mais concise des modèles suivant ces deux familles dans les deux premiers paragraphes. Elle vise surtout à ressortir les « éléments de connaissances » sur lesquels s'appuie chaque modèle, les hypothèses considérées pour leur élaboration, ainsi que leur champ d'application. Ensuite, nous présenterons le détail (hypothèses, données requises, algorithme, exemples d'application) du modèle [Multon *et al.* 2009]. Enfin, nous ferons un bilan de la modélisation de la RAS sous forme de synthèse.

### I.4.1 Modélisations des observations à l'échelle de la structure

Ces modélisations visent à analyser le comportement global d'une structure atteinte de RAS en se focalisant sur les champs de déplacements et contraintes, ainsi que sur l'endommagement dû à la fissuration. Les modèles de cette famille ne décrivent pas les mécanismes microscopiques, c'est-à-dire qu'ils ne représentent pas explicitement les granulats et les réactions physico-chimiques qui se produisent à leur échelle. En revanche, en intégrant les conditions environnementales (Température et humidité relative), ils décrivent des mécanismes macroscopiques et prennent parfois en compte des comportements complexes (plasticité, viscosité, fluage, retrait) du béton. Les modèles décrivant les observations à l'échelle de la structure servent également à la prévision des effets à long terme de la RAS sur la durabilité de structures atteintes, ainsi qu'à simuler le comportement d'une structure après certaines actions palliatives (libération des contraintes par sciage, installation d'une paroi d'étanchéité, mise en œuvre d'armatures de renfort).

#### I.4.1.1 Le modèle de [Thompson *et al.* 1994]

Le premier modèle de cette famille, selon la chronologie, est celui de [Thompson *et al.* 1994]. La cinétique de la relation n'est pas prise en compte, mais un taux de gonflement est considéré. Le gonflement anisotropique provoqué par la RAS dépend de l'état de contrainte et est défini comme une fonction du tenseur des contraintes. Les auteurs supposent que les directions principales des gonflements correspondent à celles des contraintes et qu'il n'y a plus de gonflement au-delà d'une contrainte estimée de 5 à 10 MPa. Le gonflement est en fait considéré comme une première contrainte induite par une augmentation de la température équivalente (analogie thermique). Ce modèle est très simple et assez efficace, mais il est totalement indépendant des mécanismes réactionnels de la RAS.

#### I.4.1.2 Le modèle de [Léger *et al.* 1996]

Dans le même sillage, [Léger *et al.* 1996] proposent un modèle un peu plus élaboré qui s'appuie sur la distribution observée du gonflement du béton d'un barrage atteint de RAS pour la modélisation numérique. Le gonflement est fonction de l'état de contrainte de compression, de la température, de l'humidité et la réactivité des constituants du béton, pris en compte chacun par un facteur entre 0 et 1 déterminé de manière empirique. La loi de comportement mécanique prend en compte les effets du gonflement et de la fissuration en supposant une réduction de la résistance à la traction et du module d'Young, et la loi de réduction a été estimée à partir de résultats d'essais de laboratoires tirés de la littérature. Le modèle a ensuite été mis en œuvre dans un programme aux éléments finis et utilisé pour analyser le déplacement de barrages en béton souffrant de RAS. C'est le modèle qui a été le plus utilisé dans l'analyse des barrages en béton affectés par la RAS.

Cependant, il se base sur l'approche essais/erreurs pour reproduire les déformations observées indépendamment de la physico-chimie de la RAS. [Herrador *et al.* 2009] ont intégré l'effet du fluage à ce modèle pour analyser des carottes extraites du barrage de Belesar, sujet à la RAS.

#### **I.4.1.3 Le modèle de [Huang & Pietruszczak 1999]**

[Huang & Pietruszczak 1999] utilisent une théorie continue non-linéaire pour modéliser le comportement thermomécanique de béton sujets à la RAS. Cette dernière produit un gel siliceux autour du granulats qui gonfle en créant un endommagement progressif du béton. Le taux de gonflement est supposé contrôlé par la teneur en alcalins, l'amplitude des contraintes de confinement, ainsi que l'évolution de la température. Les auteurs supposent que l'évolution de la réaction est couplée à la dégradation des propriétés mécaniques du béton. Le modèle, décrivant les effets thermomécaniques de la RAS, est utilisé pour analyser différents éléments structuraux du barrage hydroélectrique de Beauharnois au Canada. C'est la première modélisation à intégrer à la fois la cinétique chimique et le comportement mécanique.

#### **I.4.1.4 Le modèle de [Sellier & Capra 1997 , Capra & Sellier 2003]**

[Sellier & Capra 1997 , Capra & Sellier 2003] proposent une modélisation basée sur une description multi-échelle de la RAS en deux phases. Premièrement, les effets mécaniques locaux sont décrits en tenant compte des réactions chimiques élémentaires et de la répartition aléatoire de la taille et du nombre de sites réactifs, permettant ainsi de décrire le gonflement dû aux réactions chimiques. En deuxième lieu, les informations locales servent à alimenter un modèle global plus apte à représenter les effets mécaniques induits par la RAS sur une structure réelle. Le modèle prend en compte l'effet de l'humidité relative, de la température (via la loi d'Arrhenius) et de l'anisotropie de gonflement. L'humidité relative est prise en compte grâce à une courbe empirique donnant le gonflement à un degré d'humidité relative donné proportionnellement à celui observé pour une humidité relative de 100 %. La cinétique de la réaction chimique est supposée du premier ordre. La fissuration se produit en mode I, et les facteurs d'intensité de contrainte sont calculés en prenant en compte l'angle de la fissure considérée par rapport au chargement macroscopique. Les tailles de fissures sont distribuées selon une loi normale. Le modèle n'a été appliqué qu'aux résultats d'expérience sur poutres.

#### **I.4.1.5 Le modèle de [Ulm *et al.* 2000]**

[Ulm *et al.* 2000] ont élaboré un modèle de RAS faisant intervenir un couplage entre la diffusion de la chaleur et la cinétique de la réaction. Les gonflements sont obtenus à partir de l'avancement de la réaction par une loi empirique inspirée de celle de [Larive 1997] à trois paramètres : un gonflement asymptotique, un temps de latence lié à la dissolution de la silice, et un temps caractéristique de gonflement lié à la formation des gels. La diffusion de la chaleur suit

la loi de Fourier. Les auteurs considèrent l'influence importante de la température sur la RAS pour les structures épaisses, mais soulignent que l'influence de l'eau doit également être prise en compte, surtout pour des structures moins massives. Ils suggèrent également de prendre en compte l'anisotropie des gonflements générés par la RAS.

#### **I.4.1.6 Le modèle de [Li 2002]**

Le modèle de [Li 2002] suppose que le gel est sec à sa création avec la propriété de s'imbiber d'eau en fonction du temps et de l'humidité relative dans les pores. Les cinétiques de création du gel et d'absorption d'eau sont supposées être du premier ordre. Ce modèle thermo-chemo-élastoplastique a été implémenté dans CESAR-LCPC ; permettant de prendre en compte l'effet de variations de température, d'humidité relative et du gonflement interne sur le comportement du béton. Il peut reproduire des gonflements assez complexes, y compris des reprises de gonflement dues à la variation d'humidité ambiante, mais le nombre de paramètres le rend parfois difficile à utiliser en pratique.

#### **I.4.1.7 Le modèle de [Bangert *et al.* 2004]**

[Bangert *et al.* 2004] proposent un modèle poromécanique prenant en compte un squelette, une phase liquide, une phase gazeuse. La cinétique de dissolution de la silice est du premier ordre. La diffusion des phases liquides et gazeuses suit une loi de Darcy à perméabilité modifiée par l'équation de Van Genuchten. Le matériau est endommageable. Les auteurs montrent que l'hétérogénéité de l'humidité est responsable d'une augmentation de l'endommagement des structures attaquées, en raison du gradient de gonflement qui apparaît.

#### **I.4.1.8 Le modèle de [Farage *et al.* 2004]**

[Farage *et al.* 2004] ont une approche dont les principales caractéristiques sont le découplage des contraintes dues à la RAS et l'anisotropie du gonflement chimique. Certains résultats expérimentaux concernant des échantillons de bétons réactifs ont été simulés pour vérifier si le modèle était capable de décrire le comportement de structures affectées sous des chargements et conditions aux limites particulières. La réponse à un chargement cyclique a également été considérée pour simuler l'effet d'ouverture de joints (sciage), qui est une technique utilisée pour libérer les contraintes induites par la RAS dans les éléments structuraux affectés. Une deuxième version du modèle [Fairbairn *et al.* 2006], intègre les effets de la température et de l'humidité. Elle a été appliquée à la simulation 3D de gonflement d'un mur en béton du barrage hydroélectrique de Furnas.

#### **I.4.1.9 Le modèle de [Saouma & Perotti 2006]**

[Saouma & Perotti 2006] proposent un modèle thermo-chemo-mécanique dont la cinétique de gonflement est une version légèrement modifiée de la loi de [Larive 1997] pour y



intégrer l'effet du champs de contraintes. Il prend en compte l'absorption de gel par l'ouverture de fissures ainsi que l'effet de chargement extérieur. La particularité de ce modèle est l'hypothèse d'un gonflement volumétrique du gel redistribué suivant des pondérations liées au tenseur des contraintes (incluant l'anisotropie induite). Le modèle a été utilisé, en combinaison avec un modèle formel d'identification de paramètre, pour analyser des résultats d'essais triaxiaux de cylindres de béton confinés [Multon 2003]. Les auteurs l'ont aussi appliqué à l'analyse 2D d'un barrage-voûte.

#### **I.4.1.10 Le modèle de [Grimal 2007]**

Le modèle macroscopique de [Grimal 2007], sur lequel s'appuie la loi de comportement pour bétons attaqués par la RAG dans le code ASTER, a pour objectif principal de coupler, à l'échelle macroscopique, divers mécanismes dont les interactions sont généralement négligées : fluage, retrait, endommagement et RAG. La pression de gel est calculée à partir du volume de gel grâce à une loi linéaire élastique, considérant qu'une partie du gel envahit la porosité entourant les sites réactifs, et une partie envahit les fissures nouvellement créées. La vitesse de création du gel, du premier ordre, dépend du degré de saturation en eau, et de la température. Les auteurs supposent que des mécanismes de viscosité limitent les concentrations de contraintes à l'échelle microscopique. Un module viscoplastique prend en compte la dépendance empirique entre l'endommagement et le gonflement. Un module visco-élasto-plastique rend compte de l'élasticité, du retrait et du fluage. L'endommagement est anisotrope, et deux critères, l'un en traction (Rankine), l'autre pour la compression (Drucker-Prager), sont utilisés, ce qui permet le report de gonflement depuis les directions les plus compressées vers les autres. Le transport de l'eau est modélisé. Le modèle permet de reproduire de manière satisfaisante les essais triaxiaux de [Multon 2003] et a été utilisé pour l'évaluation de la durée de vie du barrage de Temple sur Lot.

#### **I.4.1.11 Le modèle de [Comi et al. 2009]**

Le modèle de [Comi et al. 2009] est un modèle d'endommagement du béton à l'échelle de la structure qui considère que ce dernier est constitué du squelette et du gel. La formation et le gonflement du gel sont décrits par une unique variable d'avancement, proportionnelle au volume de gel, par une cinétique du premier ordre. L'avancement de la réaction est indépendant de l'état de contraintes. La température est prise en compte par une loi d'Arrhenius. La température est découplée de la mécanique. L'humidité n'est pas prise en compte car le modèle est construit pour des structures massives dans lesquelles les gradients d'humidité sont plus limités. La microfissuration est traduite par un endommagement isotrope, décrit par deux variables pour rendre compte de l'endommagement en traction et l'endommagement en compression. Les paramètres du modèle sont calibrés sur les essais triaxiaux de [Multon 2003] (les gonflements asymptotiques sont différents dans les différentes directions pour rendre compte de l'anisotropie



des échantillons due à la direction de coulage), puis le modèle est utilisé sous Abaqus pour estimer la durée de vie de deux barrages attaqués.

#### I.4.1.12 Le modèle de [Pesavento *et al.* 2012]

[Pesavento *et al.* 2012] ont proposé un modèle mathématique combinant l'action hygrothermiques et les chargements chemo-mécaniques pour décrire la dégradation chimique des matériaux à base cimentaire due à la RAS, ainsi que la fissuration due aux contraintes dans le matériau. Le modèle est basé sur la mécanique des milieux poreux réactifs multiphasiques et la théorie des dommages isotropes. Les équations d'équilibre de masse et d'énergie, les lois de comportement, ainsi que les relations physiques nécessaires à la modélisation de la RAS dans des conditions hygrothermiques variables sont développés. Le gonflement/ retrait du matériau est modélisé au moyen de contraintes effectives, avec l'évolution de fraction de surfaces volumiques et des isothermes de sorption. Le gonflement est modélisé comme une déformation imposée, et est fonction à la fois de la température et de l'humidité du matériau. Une méthode pour la résolution numérique des équations du modèle par la méthode des éléments finis et différences finies est présentée. Le modèle mathématique proposé est validé en comparant les résultats de simulation avec des données expérimentales de la littérature concernant des échantillons de béton soumis à la RAS dans différentes conditions hygrothermiques, à la fois constant et variable dans le temps.

#### I.4.1.13 Synthèse

Nous avons regroupé ces modèles dans le tableau ci-après, en fonction des hypothèses sur lesquelles ils s'appuient, de la part d'effets de la RAS qu'ils décrivent, ainsi que leurs domaines d'application. La lecture du tableau de synthèse des modèles de RAS visant à décrire les observations à l'échelle de la structure permet de constater que les premiers d'entre eux, [Thompson *et al.* 1994], [Léger *et al.* 1996], étaient basés sur une analogie entre la RAS et une dilatation thermique. Ensuite, à partir de [Huang & Pietruszczak 1999], les modèles de cette famille ont été développés sur la base de la recherche de l'adéquation entre le couple cinétique de la RAS/loi de comportement mécanique et les effets de la RAS sur la structure. Dans certains modèles elles sont fortement couplées (évolution de la loi de comportement en parallèle à la cinétique de gonflement via la pression de gel) ; dans d'autres, on a un couplage faible (addition sérielle de la loi de comportement à la contrainte induite par le gonflement suivant sa cinétique). Les lois de comportement mécanique varient de l'hypothèse élastique linéaire à celle de l'endommagement isotrope voire anisotrope. Les plus sophistiqués prennent même en compte les effets du fluage et du retrait au cours de la RAS [Grimal *et al.* 2010]. Plusieurs auteurs mettent les déformations dues à la RAS en série à celles intrinsèques à la structure et utilisent la loi de Larive (Figure I.4) pour définir la cinétique de la réaction. Les autres exploitent les observations in situ et surtout les données expérimentales différemment, [Sellier *et al.* 2009] par exemple. Toutefois, tous les

modèles de cette famille sont validés en comparant les déformations prédites avec les mesures sur une structure affectée, ou tout au moins sur des essais sur poutre.

Tableau I.7 : Modèles décrivant l'observation de la RAS à l'échelle de la structure

Critères \ Modèles	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
Analogie dilatation thermique	✓	✓										
Effet de la température (ou diffusion de la chaleur)		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Rôle de l'eau (HR ou Sr)		✓		✓		✓	✓	✓		✓		✓
Pression générée dans le gel				✓				✓		✓		
Elasticité	✓	✓	✓		✓	✓				✓	✓	
Plasticité			✓	✓		✓	✓			✓		✓
Viscosité										✓		
Anisotropie de la réaction				✓		✓		✓			✓	
Effet du chargement extérieur	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓			✓
Fluage								✓		✓		
Retrait										✓		
Poromécanique							✓					✓
Capacité à être modifié (amélioré)		✓	✓	✓	✓	✓		✓				
Facilité de mise en œuvre	✓				✓				✓			
Application à des essais triaxiaux		✓		✓				✓	✓	✓	✓	✓
Application à un ouvrage réel	✓	✓	✓		✓	✓		✓	✓	✓	✓	
Cinétique de la réaction suivant [Larive 1997]					✓	✓		✓	✓			✓
Autre cinétique de RAS			✓	✓			✓			✓	✓	

A : [Thompson *et al.* 1994] B : [Léger *et al.* 1996] C : [Huang & Pietruszczak 1999] D : [Sellier & Capra 1997] [Capra & Bournazel 1998] [Capra & Sellier 2003] E : [Ulm *et al.* 2000] F : [Li 2002] G : [Bangert *et al.* 2004] H : [Farage *et al.* 2004] [Fairbairn *et al.* 2006] I : [Saouma & Perotti 2006] J : [Grimal 2007] [Grimal *et al.* 2010] K : [Comi *et al.* 2009] L : [Pesavento *et al.* 2012].

Bien que quelques-uns d'entre eux soient utilisés pour prédire le comportement structurel, ainsi que pour simuler l'effet de mesures palliatives pour des structures affectées par la RAS, leur degré de précision reste encore à améliorer en raison de la considération d'une cinétique de réaction trop globale. Une solution pourrait consister à développer une approche qui permette de partir de l'échelle du granulat où se produit la modification du matériau pour l'échelle de la structure. Les modèles ayant pour objectif de décrire les observations à l'échelle du granulat permettent justement de rendre compte des effets locaux de la RAS à travers la description de ses mécanismes physico-chimiques, utilisant des paramètres matériaux.

### I.4.2 Modélisations des observations à l'échelle du granulat

Elles partent généralement du mécanisme réactionnel de création de gel de [Dent Glasser & Kataoka 1981], puis traduisent l'interaction entre le gel, le(s) granulat(s) et la pâte environnante dans un Volume Élémentaire Représentatif (VER-volume à partir duquel les propriétés observées n'en dépendent plus). Les granulats sont presque toujours supposés sphériques. Le VER se compose soit d'un seul granulat sphérique entouré par une enveloppe d'épaisseur arbitraire (mais constante) de pâte de ciment, soit dans une sphère constituée de plusieurs classes granulaires, dont le rayon est fonction des rayons moyens des classes en présence entourées de pâte de ciment. Elles s'appuient sur des hypothèses, notamment certaines des hypothèses sur l'origine du gonflement présentées dans la sous-section I.2.3, pour simplifier (voire rendre possible) la mise en équations des interactions entre le gel produit par la RAS et les paramètres matériaux présentées dans la sous-section I.2.4. Les modèles de cette famille ont pour principal objectif de prévoir le gonflement et l'endommagement du VER (voire d'éprouvette de mortier dans certains cas). La différence entre eux se situe au niveau des réactants et des interactions considérés, puis de la manière de les modéliser. Nous les avons présentés dans l'ordre chronologique.

#### I.4.2.1 Le modèle de [Nielsen *et al.* 1993]

[Nielsen *et al.* 1993] proposent de calculer les déformations et les contraintes induites par le gonflement d'un granulat réactif sphérique placé au centre d'un volume élémentaire représentatif. Le gonflement est dû à la pénétration d'ions et d'eau dans le granulat qui génère des fissures dans le mortier et donc l'expansion du béton. Les fissures sont supposées être radiales. La cinétique de gonflement est la donnée d'entrée du modèle. L'expansion est directement liée à l'humidité relative dans les pores par l'intermédiaire d'une loi empirique. Le calcul des contraintes et des déformations est donc couplé à un calcul hydrique. Le modèle permet de mettre en évidence la grande importance des transferts hydriques sur le gonflement et les contraintes engendrées par la réaction. Il ne prend en compte qu'un seul granulat réactif. Il est parfois classé comme modèle macroscopique probablement du fait qu'il ne s'appuie que sur des données (humidité relative, charge) extérieures observées à l'échelle macroscopique.

#### I.4.2.2 Le modèle de [Furusawa *et al.* 1994]

Le modèle de [Furusawa *et al.* 1994], également appelé U.F.O. du nom des trois auteurs, décompose la RAS en un certain nombre d'étapes. Tout d'abord les ions hydroxydes et alcalins diffusent dans le granulat. Ces ions réagissent ensuite avec la silice des granulats. Comme les ions alcalins et hydroxyde interviennent dans la même réaction de dissolution, et que leur diffusion se fait ensemble, seule la diffusion des ions hydroxydes est considérée en réalité. L'étape limitante pour la dissolution est la diffusion qui permet la disponibilité des espèces, non la réaction chimique

en tant que telle. La diffusion des ions hydroxydes suit une loi de Fick avec terme puits pour représenter leur consommation par les réactions chimiques, et se fait depuis la surface vers l'intérieur de granulats sphériques. La concentration à la surface du grain, qui sert de condition aux limites à l'équation de diffusion, varie en fonction de la quantité totale d'ions alcalins disponible. Les produits de réaction sont ensuite considérés à la surface du granulat, et peuvent pénétrer dans une zone poreuse à la surface des granulats, la pression n'augmentant qu'une fois que cette zone est pleine. Le modèle est testé sur l'essai accéléré de 24h américain (ASTM C-289), lors duquel les granulats broyés sont plongés dans une solution alcaline. Les auteurs remarquent que comme la phase limitante est la diffusion, on peut simplifier l'équation de diffusion et obtenir une équation différentielle sur la profondeur d'attaque, et ainsi trouver que cette profondeur d'attaque évolue en racine carrée du temps (avec les hypothèses que la couche attaquée est fine par rapport à la taille du grain, et que tout le grain est attaqué). Leurs observations sont cohérentes avec cette évolution en racine carrée, la vitesse ne varie pas avec la taille des grains mais dépend de la concentration initiale en alcalins. La dépendance de la vitesse de réaction avec la température est prise en compte par une loi d'Arrhenius. Le modèle est ensuite appliqué sur l'attaque d'une barre de mortier (ASTM C-227), les granulats considérés étant des verres. Une relation affine est trouvée expérimentalement entre la quantité de produits de réaction et le gonflement, le retard de démarrage du gonflement étant dû au remplissage des auréoles de transition. Un effet pessimum en fraction volumique et en taille de granulats est observé.

#### I.4.2.3 Le modèle de [Sellier *et al.* 1995]

La modélisation proposée par [Sellier *et al.* 1995] s'opère en deux étapes. La première s'intéresse aux mécanismes de la réaction (réactions chimiques et diffusion des espèces), la seconde décrit les effets mécaniques induits par le gonflement du gel ; les deux s'appuyant sur des notions probabilistes. Les mécanismes réactionnels retenus sont ceux proposés par [Dent Glasser & Kataoka 1981]. Les granulats (considérés sphériques, homogènes, distribués aléatoirement dans le mortier, et tous de même diamètre) sont supposés être attaqués de manière uniforme sur leur surface. Le modèle prend en compte la concentration moyenne probable autour du granulat réactif. Le réseau siliceux contenu dans le granulat réactif est attaqué de manière surfacique par les ions hydroxydes. La vitesse d'attaque varie en fonction de la température selon une loi d'Arrhenius. La silice se combine avec les alcalins pour former un gel qui peut s'imbiber et entraîner des gonflements. La consommation des alcalins et des ions hydroxydes entraîne un déséquilibre de concentrations. Les diffusions des alcalins et des ions hydroxydes vers le granulat réactif sont décrites par des lois de Fick. Le modèle permet alors de calculer les évolutions des concentrations en gel et en alcalins à l'interface granulat/pâte au cours du temps. Le gel se forme au voisinage du granulat réactif, il peut ensuite migrer dans la porosité connectée de la pâte de

ciment entourant le granulat. La pression générée (déterminée par la loi de Laplace) est supposée ouvrir et propager des fissures en mode I. Les fissures créées constituent un nouveau vase d'expansion pour le gel. L'auteur a modélisé la distribution poreuse par une distribution statistique log-normale qu'il a calée d'après des valeurs expérimentales et dont il se sert pour relier la pression dans le gel au rayon des pores concernés. Des simulations de Monte-Carlo sont réalisées en variant la taille des sites réactifs pour déterminer l'évolution de la pression dans le gel et les tailles de fissures ; on arrive à une pression maximale de 70 GPa. Le remplissage partiel des fissures par le gel, l'influence du confinement engendré par les efforts extérieurs et l'effet d'échelle sont pris en compte. Le gonflement généré par la RAS est directement relié au volume des fissures créées. Le volume de gel formé au cours du temps, est relié au gonflement total du béton par l'intermédiaire de la mécanique linéaire de la rupture. L'avantage majeur de ce modèle est le fait que tous les paramètres utilisés ont une signification physique, excepté la cinétique de réaction qui est un paramètre de calage. L'inconvénient majeur est qu'il ne peut être utilisé pour la description du gonflement des mortiers ou des bétons pour lesquels les granulats réactifs sont présents suivant plusieurs classes granulaires, du fait qu'il ne considère qu'une seule taille de granulats réactifs.

#### I.4.2.4 Le modèle de [Bažant & Steffens 2000]

[Bažant & Steffens 2000] proposent un modèle supposant en ce qui concerne les gels produits qu'une concentration élevée en calcium en fait des produits solides proches des C-S-H, tandis qu'à faible contenu en calcium, ce sont des produits visqueux susceptibles d'absorber de l'eau et de gonfler. La concentration en calcium est supposée suffisamment faible pour que ce dernier type de gel soit produit. Des granulats denses et sphériques, d'une unique taille, sont considérés (leur modèle vise la modélisation des bétons à granulats de verre recyclé). La dissolution de la silice se produit depuis la surface. La diffusion des espèces chimiques réactives à travers cette couche de gel est l'étape limitante de la dissolution des granulats. Les auteurs supposent un arrangement périodique des grains, de façon à pouvoir simuler des fractions volumiques plus importantes qu'avec les schémas de micromécanique classique, type auto-cohérent. La diffusion à travers la couche de gel suit une loi de Fick. Une seule espèce est considérée, en l'occurrence l'eau, qui représente l'ensemble des réactifs provenant de la solution interstitielle. Les gels produits migrent partiellement dans l'auréole de transition, d'épaisseur indépendante de la taille de grain. Le gel gonfle par absorption d'eau, et est élastique linéaire. La quantité d'eau absorbée est liée par des lois simples à la pression et à l'humidité relative dans les pores. La diffusion de l'eau nécessaire au gonflement du gel est considérée indépendamment de celle de l'eau qui représente l'ensemble des réactifs de la réaction de dissolution du granulat, et modélisée par une loi de Darcy. La perméabilité est adaptée en fonction de l'humidité. Les auteurs

étudient le comportement du modèle en faisant varier différents paramètres. Ils observent une taille de particule qui conduit à une pression maximale. La formation du gel s'accélère lorsqu'on diminue la taille des particules, à cause d'un effet de surface spécifique. Pour la même raison, l'humidité baisse plus pour les petites particules, ce qui laisse moins d'eau disponible pour faire gonfler le gel. Un effet pessimum sur la quantité de silice réactive est observé. La taille de grain pessimum augmente lorsque la perméabilité du gel augmente.

#### **I.4.2.5 Le modèle de Xi**

Le modèle de Xi [Suwito *et al.* 2002] étudie l'attaque d'un granulat homogène et dense (recyclage de verre comme granulats) par les ions hydroxydes. L'objectif est de reproduire l'effet pessimum en taille dans le test américain standardisé de 14 jours sur éprouvettes de mortier placées dans une solution alcaline (ASTM C-1260). Le modèle comprend deux parties : d'une part l'utilisation de la micromécanique pour calculer les gonflements et les pressions générées par l'alcali-réaction au sein de granulats de différentes tailles, et un calcul de diffusion d'autre part. Dans la partie micromécanique, le béton est considéré comme un assemblage de sphères à deux phases. La première phase, dans chaque VER, est la sphère intérieure qui représente le granulat et le gel, la seconde phase est la pâte de ciment. Le rapport entre les rayons des deux sphères permet de respecter la fraction volumique réelle des granulats. Le gonflement est supposé uniforme dans le granulat. Le gonflement libre macroscopique est calculé comme moyenne des gonflements de chaque VER. Le modèle de diffusion distingue deux phases pour ce qui est des réactifs : la diffusion des ions depuis la surface de l'éprouvette vers le granulat réactif, puis la diffusion depuis la surface du granulat vers son centre. La diffusion des gels d'alcali-réaction est ensuite considérée : le gel en excédent par rapport à la porosité du granulat et de l'auréole de transition diffuse dans la porosité de la pâte de ciment. Le béton est considéré saturé en eau. La diffusion suit une loi de Fick, les auteurs donnent une solution analytique pour la diffusion dans le granulat. La diffusion dans la pâte est considérée beaucoup plus rapide donc l'extérieur de chaque granulat est à la même concentration en réactifs. La migration du gel suit une loi de Darcy, le volume qui doit se déplacer étant égal au volume de gel diminué du volume de l'auréole de transition qui pour chaque grain, est proportionnel à sa surface. Le volume de gel par unité de volume de matrice cimentaire est considéré proportionnel à la pression de gel, ce qui est présenté comme une approximation. Le problème est finalement résolu analytiquement. L'effet pessimum en taille est reproduit.

#### **I.4.2.6 Le modèle de [Comby Peyrot 2006]**

Le modèle de [Comby Peyrot 2006] se base sur le mécanisme réactionnel des Mines de Douai et sur leur méthode de quantification de l'avancement de la réaction qui permet de relier le gonflement d'un mortier au gonflement des granulats. L'objectif de ce modèle est donc d'utiliser le gonflement des grains comme une entrée du modèle, de prendre en compte dans un code de calcul

par éléments finis (FEMCAM) la distribution des granulats dans l'espace, et de calculer l'endommagement de la pâte de ciment environnante ainsi que les gonflements macroscopiques (par modèle d'endommagement de Mazars). Les granulats sont considérés élastiques, sans endommagement, et leur variation de volume est l'entrée du modèle. Les gonflements aux temps courts sont bien reproduits, mais après un certain temps de réaction, ils sont surestimés par rapport aux expériences. Cela peut venir, d'après les auteurs, de l'absence de prise en compte de l'endommagement des granulats, ou de l'absence de véritable fissuration dans la pâte de ciment. Les schémas d'endommagement semblent bien reproduire le type de fissuration habituellement observé en surface d'éléments de bétons attaqués. La diminution des modules élastiques du béton est également bien reproduite (diminution de l'ordre de 30 % pour un gonflement des grains de 10 %). Il y a une dépendance marquée de la vitesse de gonflement macroscopique en fonction de la concentration de granulats réactifs et de la taille de ces granulats. Le modèle est enrichi de la possibilité d'avoir des fissures, mais la comparaison avec les expériences n'est pas effectuée pour ce qui est de la réaction alcali-silice. Les auteurs pensent qu'un autre enrichissement important est de prendre en compte le fluage du béton, ce qui pourrait permettre de moins surestimer les déformations après un long temps d'attaque. Le travail de [Naar 2009] prolonge celui de [Comby Peyrot 2006]. Le modèle est enrichi d'une description beaucoup plus fine de la chimie de l'alcali-réaction et du transport. La diffusion de la silice et des alcalins est prise en compte. La réaction chimique de dissolution de la silice n'est pas instantanée, mais modérée par un paramètre cinétique. Un couplage de la mécanique sur le transport est également implémenté, avec la variation des coefficients de diffusion en fonction de l'état d'endommagement calculé par le modèle non local de [Mazars 1984]. L'auteur juge cependant que la dégradation de l'élément en béton est surestimée avec ce modèle d'endommagement.

#### I.4.2.7 Le modèle de [Ichikawa & Miura 2007]

L'idée originale du modèle d'Ichikawa [Ichikawa & Miura 2007] est de mettre l'accent sur la nature différente des précipités contenant du calcium de ceux qui n'en contiennent pas. Le gel silico-alcalin est supposé visqueux, tandis que le gel calco-silico-alcalin est supposé rigide, et confiné à l'anneau de réaction « reaction rim » à l'interface du granulat avec la pâte de ciment. L'anneau de réaction empêche l'écoulement des gels visqueux vers l'extérieur du granulat mais n'entrave pas la diffusion des ions hydroxydes d'alcalin vers l'intérieur du grain. L'attaque du granulat se poursuit donc, tandis que les produits de réaction visqueux s'accumulent dans le grain. La matrice est divisée en deux zones à symétrie sphérique : une partie fissurée et une partie saine. Ce modèle est pensé pour des granulats siliceux denses, pour lesquels l'attaque se produit depuis la surface vers le centre. Le gonflement est lié à la fissuration de l'anneau de réaction, non à celle de la pâte de ciment. Dans ce modèle, les auteurs prennent en compte les différentes tailles de



granulats, considérés sphériques. La diversité réelle des formes est prise en compte en affectant une résistance aléatoire aux anneaux de réaction. La probabilité qu'un anneau d'épaisseur donnée ne casse pas à une quantité de gel donnée suit une loi normale. Après fissuration de l'anneau, le gel dans le grain n'absorbe pas beaucoup de calcium car la formation de l'anneau de réaction consomme la majorité du calcium disponible. La pression maximale atteinte est de l'ordre de 400 GPa. Un facteur de gonflement est affecté au gel à sa création, les modules d'incompressibilité du gel et du granulats sont finis. Dans un premier temps, le gel est considéré immature. Il s'hydrate ensuite, puis réagit avec le calcium, ce qui le rend fragmentaire. La réaction du gel non hydraté avec le calcium forme l'anneau de réaction. Le gonflement macroscopique est ensuite relié au volume des grains dont l'anneau de réaction s'est fissuré sous pression du gel. Ce modèle permet aux auteurs de reproduire l'effet pessimum lié à la fraction volumique des granulats, ainsi qu'en taille.

#### I.4.2.8 Le modèle de [Poyet *et al.* 2007]

Le modèle de [Poyet *et al.* 2007] se place dans le sillage de celui de [Sellier *et al.* 1995]. Le couplage entre les tailles de granulats par l'équilibre d'une quantité totale de réactif est inspiré de [Furusawa *et al.* 1994], ceci pour prendre en compte l'effet de la distribution de tailles de granulats sur le développement de l'alcali-réaction. Les granulats sont supposés sphériques. Il appelle Volume Élémentaire Représentatif (VER) un granulats entouré d'une portion de pâte de ciment. Un problème de diffusion d'espèces chimiques réactives sur ce VER (suivant une loi de Fick) est traité de façon à calculer la quantité de réactifs en fonction du rayon, qui est couplée à l'avancement de la réaction de dissolution du granulats par un terme de puits dans l'équation de diffusion. Les espèces considérées sont : les alcalins, les ions calcium en solution, la portlandite, la silice réactive et les produits de réaction. Le déroulement de la réaction suit le mécanisme proposé par [Dent Glasser & Kataoka 1981], complété par [Poole 1992] pour la prise en compte du calcium. Une fois la porosité connectée au grain remplie, la montée en pression du gel débute, limitée par le niveau d'endommagement du VER. En parallèle, il y a diffusion des réactifs dans la matrice vers les granulats, dissolution de portlandite et diffusion des ions calcium. La diffusion des ions est l'étape limitante. Ce formalisme permet une estimation du volume de gel créé, à partir d'une estimation de Lombardi [Lombardi *et al.* 1997, Perruchot *et al.* 2003] du volume molaire des gels. L'énergie développée par la précipitation (due à l'augmentation de volume) sert intégralement à endommager le matériau, ce qui donne une expression de l'endommagement, sous forme d'équation différentielle, en fonction du volume de gel. La déformation du mortier est enfin estimée par une relation empirique en fonction de l'endommagement, inspirée de [Sellier *et al.* 1995]. Le modèle est ensuite enrichi de la prise en compte de la teneur en eau au niveau local, directement sur l'avancement de la réaction. La teneur en eau est calculée par résolution d'une équation de



diffusion non linéaire, la diffusivité dépendant de la teneur en eau. Le modèle se prolonge à l'échelle supérieure par un modèle de calcul de structures. La déformation de la structure est composée de plusieurs contributions : déformation élastique, déformation due à l'alcali-réaction, fluage, déformation de séchage, déformation thermique. La déformation de séchage est liée au degré de saturation en eau par une équation empirique. Les déformations liées à la réaction alcali-silice sont calculées à partir de l'endommagement dans chaque direction. La cinétique de la réaction est liée au degré de saturation en eau. Enfin l'endommagement anisotrope est obtenu à partir de l'état de contrainte local.

#### I.4.2.9 Le modèle de [Multon *et al.* 2009]

[Multon *et al.* 2009] ont proposé un modèle dont l'objectif est d'expliquer le rôle de la taille des granulats et de la quantité d'alcalins observé dans plusieurs séries d'expériences [Multon *et al.* 2008] [Multon *et al.* 2009] et dans le travail de [Poyet 2003]. Le volume de gel produit par chaque taille de grain est calculé à partir de sa fraction volumique et de la quantité d'alcalins disponibles. Ce volume est corrigé pour prendre en compte le volume qui se déplace vers l'auréole de transition et limite ainsi pendant un temps la montée en pression du gel. Enfin, la déformation moyenne est reliée linéairement à la variation de volume des granulats par un paramètre à identifier, mais les phénomènes de rupture ne sont pas traités. L'effet pessimum en taille est cependant bien reproduit. L'endommagement de la pâte de ciment entourant le granulat est calculé de façon à intégrer la microfissuration induite par la montée en pression du gel, et à estimer ainsi les déformations macroscopiques par un vrai calcul mécanique et non simplement en supposant une relation linéaire entre pression du gel et déformation macroscopique. Ce modèle est également utilisé dans les travaux de [Gao 2010] [Gao, Multon, *et al.* 2013] où sont discutés l'effet pessimum en taille et l'effet des dimensions des éprouvettes sur les gonflements. Les auteurs y soulignent l'effet trop peu étudié des dimensions des éprouvettes lors d'essais en laboratoire. [Sanchez, Multon, *et al.* 2014] utilisent également ce modèle sur du béton testé en laboratoire.

#### I.4.2.10 Le modèle de [Dunant 2009]

Le modèle de [Dunant 2009] reprend les conclusions de [Ben Haha & Scrivener 2007] pour construire un modèle dans lequel l'avancée de la réaction est liée à la fraction de vides et fissures, qui elle-même est reliée au gonflement macroscopique. Le modèle, décrit dans [Dunant & Scrivener 2010], se base sur des éléments finis, dans lequel les granulats, sphériques, sont maillés explicitement. Les zones réactives sont placées aléatoirement dans les grains et gonflent. Les auteurs s'intéressent en effet à des granulats à réactivité lente pour lesquels les zones qui gonflent forment des poches à l'intérieur des grains. Le modèle permet de calculer l'endommagement des granulats et de la pâte de ciment sous l'effet du gonflement des zones réactives, en utilisant un critère de Mohr-Coulomb. Les propriétés mécaniques sont distribuées aléatoirement. Le gel est

élastique, presque incompressible. Les résultats sont en bon accord avec les résultats expérimentaux pour ce qui est des courbes de gonflement libre. Le gonflement est cependant surestimé car le fluage n'est pas pris en compte. Les auteurs constatent que l'endommagement démarre bien dans les granulats, ce à quoi on s'attend pour ce type de granulats à réactivité lente où le gel est présent sous forme de poches dans les grains. Une comparaison est faite des schémas d'endommagement selon que le gel est présent de manière uniforme dans le grain ou à la surface du grain. Les auteurs trouvent que seule la première option permet de reproduire correctement les courbes de gonflement expérimentales et les schémas d'endommagement observés. [Dunant & Scrivener 2012] consacrent un article plus récent à l'étude de l'anisotropie de l'alcali-réaction sous chargement. Cet article présente des résultats expérimentaux de gonflement sous chargement uniaxial. Ce modèle d'endommagement par éléments finis de bétons attaqués par l'alcali-réaction est ensuite testé sur ces cas de chargement. Les schémas d'endommagement, dans les granulats (où se trouvent les poches de gel) et dans la pâte de ciment, sont orientés par le chargement macroscopique. Le modèle est en revanche limité à cause de sa nature bidimensionnelle, puisque cela favorise la coalescence des fissures. L'échantillon est donc fissuré de part en part artificiellement aux fortes charges (au-dessus de 5 MPa).

#### **I.4.2.11 Le modèle de [Shin *et al.* 2011]**

[Shin *et al.* 2011] proposent un modèle numérique basé sur les images de la microstructure et les propriétés des matériaux fondamentales de chaque constituant d'un béton soumis à une RAS. Une approche par éléments finis basée sur la microstructure est utilisée pour analyser la réponse mécanique du béton à la RAS. Cette modélisation comprend les étapes d'acquisition et de traitement d'images microstructurales d'échantillons de béton souffrant de RAS, en utilisant la microscopie électronique à balayage, et le programme aux éléments finis implémenté pour analyser lesdites images. La formulation de ce modèle est basée sur la pression générée par le gel produit par la RAS, ainsi que ses effets sur des propriétés mécaniques du béton telles que le module de Young et coefficient de Poisson. Ladite pression a été simulée en affectant un taux d'expansion thermique et une variation de température fictifs au gel. Le programme d'analyse aux éléments finis élastique linéaire 2D utilisé pour simuler le comportement mécanique des structures attaquées par la RAS est orienté-objet élément fini, et a été développé par le NIST (National Institute of Standards and Technology). Les résultats numériques de ce modèle sont comparés aux données expérimentales, qui ont été mesurées selon l'essai normalisé ASTM C1260. Les auteurs constatent que le développement et l'ouverture de fissures par formation et gonflement du gel provoquent l'expansion de la majorité des échantillons de mortier plutôt que leur allongement élastique.

#### I.4.2.12 Le modèle de [Giorla 2013]

Dans sa thèse, [Giorla 2013] réalise un montage expérimental inspiré des cellules triaxiales pour étudier le comportement de béton affecté par la RAG sous contrainte multiaxiales. Les déformations latérales et verticales sont mesurées in-situ avec des capteurs en fibre optique coulés dans le béton. Le dispositif est dimensionné de manière à résister pour une longue durée aux conditions expérimentales, particulièrement agressives en termes de température, pression et concentration en ions alcalins. L'analyse des expériences sous contrainte amène l'auteur à compléter le modèle de [Dunant & Scrivener 2012] par un modèle viscoélastique pour représenter le couplage entre endommagement et relaxation des contraintes dans la pâte de ciment. Une méthode numérique basée sur les éléments finis espace-temps est développée et implémentée. Cette méthode permet de représenter la croissance continue des produits de RAG avec le temps ainsi que l'irréversibilité thermodynamique du système. La répartition des contraintes dans une microstructure de béton affectée par la RAG est étudiée grâce à ce modèle. L'endommagement et la viscoélasticité sont pris en compte simultanément pour reproduire les effets des contraintes sur le gonflement induit par la RAG. Ce modèle permet une réinterprétation des tests accélérés et une meilleure corrélation avec les conditions réelles.

#### I.4.2.13 Le modèle de [Charpin & Ehrlacher 2014b]

[Charpin & Ehrlacher 2014b] proposent un modèle dont l'objectif est de simuler, à partir d'hypothèses simples sur les mécanismes réactionnels en jeu, pour une classe de granulats à réactivité rapide, le déroulement de la fissuration du béton au niveau microscopique, de façon à estimer les déformations et les propriétés mécaniques du béton attaqué. Ils utilisent pour cela une description micromécanique du béton qui leur permet de calculer les propriétés mécaniques et les déformations en fonction de l'état de fissuration, et un critère énergétique de fissuration de façon à faire évoluer l'état de fissuration. Le fonctionnement du modèle est testé sur de nombreux cas qui font apparaître que l'utilisation d'un critère de rupture énergétique en micromécanique est bien adaptée à l'alcali-réaction. L'identification des paramètres du modèle sur les résultats des essais de [Multon 2003] donne de bons résultats pour des chargements en dessous de 10 MPa, mais conduit à des estimations très élevées des énergies mécaniques. Le modèle a en effet tendance à surestimer l'anisotropie du gonflement qui est compensée par l'augmentation de l'énergie surfacique de fissuration. Les auteurs soulignent le fait que leur modèle ne reproduit pas correctement les résultats d'essais sous fort chargement extérieur à cause de la simplicité de la description de la décohésion. Cependant, ils concluent que l'approche micromécanique qu'ils ont adoptée est encourageante, et que la correction des défauts mis en exergue conduirait probablement à un modèle efficace pour la modélisation de l'anisotropie de la RAS.

#### I.4.2.14 Synthèse

Le tableau ci-après regroupe les modèles décrivant la RAS à l'échelle du granulat en fonction des hypothèses sur lesquelles ils s'appuient, la part de paramètres influents pris en compte ainsi que leur champ d'application.

Tableau I.8 : Modèles décrivant l'observation de la RAS à l'échelle du granulat

Critères \ Modèles	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
Hypothèse des pressions osmotiques														
Hypothèse de la dissipation du gel	✓	✓	✓	✓	✓					✓				
Hypothèse des potentiels chimiques														
Hypothèse de la double couche électrique														
Hypothèse du gonflement des corps poreux	✓	✓	✓	✓	✓					✓	✓	✓	✓	✓
Hypothèse du gonflement granulaire							✓	✓	✓		✓		✓	✓
Effet pessimum		✓	✓	✓	✓					✓	✓			
Influence de l'eau	✓	✓		✓		✓			✓					
Influence des porosités			✓		✓	✓			✓		✓			
Influence de la température	✓	✓										✓		
Diffusion des espèces suivant la loi de Fick			✓	✓	✓	✓			✓	✓				
Diffusion (gel/eau) suivant la loi de Darcy				✓	✓									
Gestion de l'anisotropie			✓			✓					✓		✓	✓
Effet du chargement extérieur	✓	✓	✓			✓					✓		✓	✓
Gestion de plusieurs granulats		✓			✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓
Utilisation de la micromécanique	✓			✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Paramètres majoritairement physiques						✓				✓				
Paramètres majoritairement empiriques							✓	✓				✓		✓
Calcul d'éprouvette de mortier					✓	✓				✓	✓	✓	✓	✓
Modélisation analytique	✓	✓	✓	✓	✓	✓				✓				✓
Modélisation numérique							✓	✓			✓	✓	✓	
Intégration de l'approche probabiliste			✓						✓					
Influence du calcium						✓			✓					

A: [Nielsen *et al.* 1993] B: (U.F.O., 1992-1994) C: [Sellier 1995] D: [Bažant & Steffens 2000] E: [Suwito *et al.* 2002] F: [Poyet *et al.* 2007] G: [Comby Peyrot 2006] H: [Naar 2009] I: [Ichikawa & Miura 2007] J: [Multon *et al.* 2009] K: [Dunant 2009] [Dunant & Scrivener 2012] L: [Shin *et al.* 2011] M: [Giorla 2013] N: [Charpin & Ehrlicher 2014b]

L'analyse de ce tableau de synthèse des modèles conçus pour décrire les observations à l'échelle du granulat jusqu'à l'éprouvette montre que la majorité de ces modèles n'est applicable qu'à un seul granulat. Peu d'entre eux utilisent des paramètres de modèles correspondant à des paramètres physiques mesurables. Ainsi, parmi les quelques modèles éligibles à la nouvelle approche que nous voulons développer, à savoir le recalcul d'ouvrage atteint de RAG à partir d'un modèle microscopique s'appuyant majoritairement sur des paramètres physiques mesurables, nous avons retenu le modèle de [Multon *et al.* 2009]. En effet, il peut gérer différentes classes

granulaires, s'appuie sur des paramètres ayant une signification physique, mesurables pour la plupart par différents essais sur carottes d'ouvrage atteints [Gao 2010] à l'exception de trois d'entre eux. Toutefois, ce modèle n'a été utilisé jusqu'ici que pour des calculs sur éprouvettes testées en laboratoire ; [Multon *et al.* 2009], [Gao 2010] pour des mortiers, et [Sanchez, Fournier, *et al.* 2014] pour des bétons. Néanmoins, les résultats de [Sanchez, Fournier, *et al.* 2014] laissent présager une applicabilité à l'échelle de la structure. De plus, ce modèle développé au LMDC peut être « ajusté » au besoin avec la participation des experts l'ayant mis au point. Nous détaillons ce modèle dans le prochain paragraphe.

### I.4.3 Le modèle [Multon *et al.* 2009]

Ce modèle, développé au LMDC, considère la définition d'un volume élémentaire représentatif (VER) de béton qui contient à la fois la pâte de ciment et les granulats, réactifs ou non, de différentes tailles (Figure I.6).

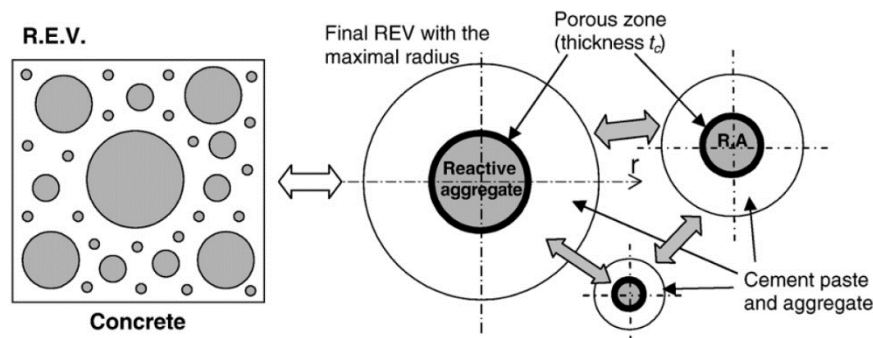


Figure I.6 : Définition du volume élémentaire représentatif pour plusieurs tailles de granulats réactifs [Multon *et al.* 2009]

Dans ce paragraphe, nous allons premièrement détailler les hypothèses sur lesquelles s'appuie ce modèle, les données requises pour son utilisation, ainsi que l'algorithme de son implémentation.

#### I.4.3.1 Cadre de la modélisation

Le cadre de ce modèle est constitué des hypothèses présentées ci-après. Les hypothèses en gris sont celles qui ne sont pas tout à fait vérifiées dans le contexte d'utilisation envisagé.

- i. Les effets d'un chargement extérieur ne sont pas considérés (gonflement libre)
- ii. La libération des alcalins par substitution par les ions calcium n'est pas prise en compte
- iii. Le mécanisme réactionnel (diffusion des espèces ioniques puis formation des gels) considéré est celui proposé par [Dent Glasser & Kataoka 1981], le gonflement est régi par l'hypothèse de [Jones 1988]
- iv. Seule la diffusion dans le granulat est considérée, celle dans la pâte de ciment étant considérée instantanée

- v. La réaction ne peut démarrer que pour une concentration en alcalin supérieure à un seuil  $Na_{th}$
- vi. Les granulats réactifs ainsi que le VER sont supposés sphériques
- vii. On considère que les granulats de même taille gonflent avec les mêmes cinétiques, amplitudes et épaisseurs de porosité connectée
- viii. On considère que 1 mole de gel est obtenue par la réaction de 1 mole de  $Na_2O_{eq}$  avec 5 moles de  $SiO_2$  ( $Na_2O/SiO_2 = 0.2$ ), le gel étant supposé incompressible
- ix. Les propriétés mécaniques des granulats et de la pâte de ciment sont supposées isotropes et leur comportement élastique linéaire
- x. L'effet du fluage du béton est pris en compte par l'utilisation d'un module d'Young « long terme » pris égal au tiers du Module d'Young instantané (selon les Eurocodes 2)
- xi. On considère un état endommagé moyen équivalent à la fissuration et son effet est pris en compte par réduction du module d'Young

#### I.4.3.2 Données d'entrée du modèle

Les principales données d'entrée du modèle sont :

- i. Masse d'alcalin équivalent par  $m^3$  de béton ( $M_{Na_2O}$ , obtenue de la formulation du béton).
- ii. Masse molaire d'alcalin équivalent ( $M_{Na_2O}^{mol} = 0,062 \text{ kg/mol}$ ).
- iii. Tailles des granulats réactifs ( $R_{a1}, \dots, R_{an}$ , par classe granulaire obtenues par essais sur échantillon d'ouvrage ou fixées pour des éprouvettes de Laboratoire).
- iv. Fractions volumiques de granulats réactifs associée à chaque taille ( $\phi_{a1}, \dots, \phi_{an}$ ) par classe granulaire déduites des essais pour  $R_{ai}$  ou fixées pour des éprouvettes de Laboratoire.
- v. Fraction volumique de granulat dans le béton  $C_{agg}$ , obtenue de la formulation du béton.
- vi. Le degré de saturation du béton  $S_r$ .
- vii. Propriétés matériaux : module d'Young et coefficient de Poisson respectivement du granulat de classe a ( $E_a$  et  $\nu_a$ ) et du volume élémentaire représentatif ( $E_{rev}$  et  $\nu_{rev}$ ), résistance à la traction  $f_t$ , porosité du granulat  $P_{agg}$ , porosité du mortier  $P_{mor}$ , obtenues par essais sur échantillons ou de la littérature.
- viii. Paramètres obtenus par fittage de courbes expérimentales : coefficient de diffusion dans le granulat  $D$ , épaisseur de la porosité connectée  $t_c$ , volume molaire de gel  $V_{gel}^{mol}$ , seuil d'alcalins  $Na_{th}$ , coefficient de fixation d'alcalins  $f$ .

#### I.4.3.3 Algorithme d'implémentation du modèle

L'implémentation du modèle a été faite sous FORTRAN suivant l'algorithme ci-dessous, en utilisant la méthode des différences finies pour la résolution des équations différentielles.

Tableau I.9 : Algorithme d'implémentation du modèle [Multon *et al.* 2009]

<b>Entrées :</b> $M_{Na2O}$ , $M_{Na2O}^{mol}$ , $Na_{th}$ , $S_r$ , $R_{a1}, \dots, R_{an}$ , $\phi_{a1}, \dots, \phi_{an}$ , $C_{agg}$ , $P_{agg}$ , $P_{mor}$ , $D$ , $t_c$ , $V_{gel}^{mol}$ , $f$ , $t_f$
<b>Sortie :</b> Volume total de gel créé dans le VER $V_{g(t)}$
<b>Début</b>
1-Calculer $p_{cp}$ (Eqn I.6) puis calculer $C_{Na(0)}$ (Eqn I.7)
2-Si $C_{Na(0)} \leq Na_{thr}$ Fin
<b>Sinon</b> Faire $V_{g(0)} = 0$ , $i = 1$
3- Faire $N_{ai} = \frac{\phi_{ai} \cdot C_{agg}}{(\frac{4}{3}\pi R_{ai}^3)}$ , $V_{g(0)}^{ai} = 0$ , $n_{g(0)}^{ai} = 0$ et $S(C_{Na}^{ai})_{(0)} = f(C_{Na(0)} - Na_{thr})$
<b>Fin si</b>
4-Si $i = n$ 5- Faire $t = 1$ , $dt = 1$ , $i = 1$ , $dr$
<b>Sinon</b> Incrémenter $i$ et revenir à l'étape 3
<b>Fin si</b>
6-Si $S(C_{Na}^{ai})_{(t-dt)} = 0$ Passer à l'étape 10
<b>Sinon</b> 7- Déterminer $C_{Na(t)}$ , en résolvant une équation de la chaleur suivant (Eqn I.8) Avec: $0 \leq r \leq R_{ai}$ , A $r = 0$ , le flux est nul ; à $r = R_{ai}$ , la concentration en alcalins est celle de la pâte de ciment $C_{Na(t-dt)}$
<b>Fin si</b>
8- Si $C_{Na(t)}^{ai} > Na_{thr}$ $S(C_{Na}^{ai})_{(t)} = f(C_{Na(t)}^{ai} - Na_{thr})$
<b>Sinon</b> $S(C_{Na}^{ai})_{(t)} = 0$
9-Calculer $n_{g(t)}^{ai}$ (Eqn I.9), $V_{g(t)}^{ai}$ (Eqn I.10)
<b>Fin si</b>
<b>Si</b> $i < n$ 10- Incrémenter $i$ et revenir à l'étape 6
<b>Sinon</b> 11-Calculer $C_{Na(t)}$ (Eqn I.11) et $V_{g(t)}$ (Eqn I.12)
<b>Fin si</b>
<b>Si</b> $t \neq t_f$ alors $t = t + dt$ , $i = 1$ et revenir à l'étape 6
<b>Fin si</b>
<b>Retour</b>
<b>Fin</b>

Expression de la porosité du béton :

$$p_{cp} = \frac{p_{mort} - p_{agg} \cdot C_{agg}}{(1 - C_{agg})} \quad \text{Eqn I.6}$$

Expression de la concentration initiale en alcalin :

$$C_{Na(0)} = 2 \times \frac{M_{Na2O}}{M_{Na2O}^{mol}} \times \frac{1}{p_{cp} S_r (1 - C_{agg})} \quad \text{Eqn I.7}$$

Equation de diffusion des alcalins dans le granulat :

$$\frac{\partial}{\partial t} (p_{agg} S_r C_{Na}^{ai}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( D \cdot r^2 \frac{dC_{Na}^{ai}}{dr} \right) + S(C_{Na}^{ai})_{(t-dt)} \quad \text{Eqn I.8}$$



Expression du nombre de mole de gel crée pour une classe granulaire :

$$n_{g(t)}^{ai} = \frac{20}{3} \pi R_{ai}^3 [S(C_{Na})_{(t)} + S(C_{Na})_{(t-dt)}] \quad \text{Eqn I.9}$$

Expression du volume de gel crée pour une classe granulaire :

$$V_{g(t)}^{ai} = V_{gel}^{mol} n_{g(t)}^{ai} + V_{g(t-dt)}^{ai} \quad \text{Eqn I.10}$$

Expression de la concentration en alcalin à l'instant  $t$  :

$$C_{Na(t)} = \frac{4\pi D dt}{p_{cpS_r}} \sum_i N_{ai} R_{ai}^2 \left( C_{Na(t)}^{ai}(R_{ai}) - C_{Na(t)}^{ai}(R_{ai} - dr) \right) \quad \text{Eqn I.11}$$

Expression du volume total de gel crée dans le VER :

$$V_{g(t)} = V_{gel}^{mol} \sum_i n_{g(t)}^{ai} N_{ai} + V_{g(t-dt)} \quad \text{Eqn I.12}$$

## I.5 Synthèse

Bien qu'il existe un nombre considérable de modèles de RAS, et même de classification de ces derniers dans la littérature, on peut dire qu'il en existe deux grandes familles. Premièrement, les modèles ayant pour objectif de décrire les observations à l'échelle de la structure. Nous les avons regroupés dans le [Tableau I.7](#) en fonction des hypothèses sur lesquels ils s'appuient et de la part d'effets de la RAS qu'ils décrivent. Deuxièmement, les modèles servant à décrire les observations à l'échelle du granulat. Nous les avons également regroupés dans le [Tableau I.8](#) en fonction des hypothèses sur lesquels ils s'appuient, la part de paramètres influents pris en compte ainsi que leur champ d'application.

La lecture du tableau de synthèse des modèles de RAS visant à décrire les observations à l'échelle de la structure permet de constater que les premiers d'entre eux [Thompson *et al.* 1994], [Léger *et al.* 1996], étaient basés sur une analogie entre la RAS et une dilatation thermique. Ensuite, à partir de [Huang & Pietruszczak 1999], les modèles de cette famille ont été développés sur la base de la recherche de l'adéquation entre le couple (cinétique de la RAS/Loi de comportement mécanique) et les effets de la RAS sur la structure. Dans certains modèles elles sont fortement couplées (évolution de la loi de comportement en parallèle à la cinétique de gonflement via la pression de gel) ; dans d'autres, on a un couplage faible (superposition de la contrainte d'origine mécanique à la contrainte induite par le gonflement suivant sa cinétique). Les lois de comportement mécanique varient de l'hypothèse élastique linéaire à celle de l'endommagement isotrope voire anisotrope. Les plus sophistiquées prennent même en compte les effets du fluage et du retrait au cours de la RAS [Grimal *et al.* 2010, Sellier *et al.* 2016]. Plusieurs auteurs, dont les modèles superposent les déformations dues à la RAS à celles intrinsèques à la structure, utilisent l'équation de la sigmoïde de Larive ([Figure I.4](#)) pour définir la cinétique de la réaction (malgré le



fait que les paramètres  $\tau_L$ ,  $\tau_C$  et  $\varepsilon_\infty$  soient obtenus par calage sur les déplacements de la structure et ne soient reliés ni à la physico-chimie de la RAG, ni explicitement aux paramètres matériaux). Les autres exploitent les observations in situ et surtout les données expérimentales différemment, [Sellier *et al.* 2009] par exemple. Toutefois, tous les modèles de cette famille sont validés en comparant les déformations prédites avec les mesures sur une structure affectée, ou tout au moins sur des essais sur poutre. Bien que quelques-uns d'entre eux soient utilisés pour prédire le comportement structurel, ainsi que pour simuler l'effet de mesures palliatives pour des structures affectées par la RAS, leur degré de précision reste encore à améliorer en raison de la considération d'une cinétique de réaction trop globale. Les modèles ayant pour objectif de décrire les observations à l'échelle du granulat permettent justement de rendre compte des effets locaux de la RAS à travers la description de ses mécanismes physico-chimiques.

L'analyse du tableau de synthèse des modèles conçus pour décrire les observations de l'échelle du granulat jusqu'à l'éprouvette montre que certains de ces modèles ne sont applicables qu'à un seul granulat : [Nielsen *et al.* 1993], [Sellier *et al.* 1995], [Bažant & Steffens 2000], [Shin *et al.* 2011]. Deux modèles intègrent l'influence du calcium sur la réaction : [Poyet *et al.* 2007] et [Ichikawa & Miura 2007] [Ichikawa & Miura 2007]. Ce dernier, ainsi que [Sellier *et al.* 1995], utilisent l'approche probabiliste. Seulement la moitié des modèles de cette famille ont été utilisés pour le calcul d'éprouvette de mortier, desquels seuls deux ont également des paramètres de modèles correspondant à des grandeurs physiques mesurables : [Poyet *et al.* 2007] et [Multon *et al.* 2009].

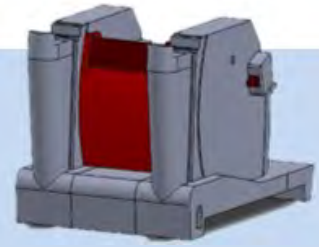
Une voie d'amélioration de la précision du recalcul d'ouvrages atteints de RAG pourrait consister à développer une approche qui permette de partir d'une modélisation à l'échelle du granulat où se produit la modification du matériau pour un calcul à l'échelle de la structure. Cela consiste à aller un peu plus loin que les modèles déjà sur cette voie qui eux calent la cinétique de gonflement à l'échelle du granulat et font le calcul mécanique à l'échelle de la structure, sans continuité. Ainsi, parmi les quelques modèles éligibles à la nouvelle approche que nous voulons développer, à savoir le recalcul d'ouvrage atteint de RAG à partir d'un modèle à l'échelle du granulat s'appuyant majoritairement sur des paramètres physiques mesurables, nous avons retenu le modèle de [Multon *et al.* 2009]. En effet, il peut gérer différentes classes granulaires, s'appuie sur des paramètres ayant une signification physique, mesurables pour la plupart par différents essais sur carottes d'ouvrage atteints [Gao 2010] à l'exception de trois d'entre eux. Toutefois, ce modèle n'a été utilisé jusqu'ici que pour des calculs sur éprouvettes testées en laboratoire ; [Multon *et al.* 2009], [Gao 2010] pour des mortiers, et [Sanchez, Multon, *et al.* 2014] pour des bétons. Néanmoins, les résultats de [Sanchez, Multon, *et al.* 2014] laissent présager une applicabilité à l'échelle de la structure. De plus, ce modèle développé au LMDC peut être « ajusté »

au besoin avec la participation des experts l'ayant mis au point. Nous avons terminé ce paragraphe en présentant le cadre, les données et l'algorithme du modèle [Multon *et al.* 2009].

Pour tenir compte des incertitudes entourant la vingtaine de paramètres pris en compte par le modèle choisi, nous allons utiliser une approche probabiliste dans laquelle chaque paramètre doit être, à priori, considéré comme une variable aléatoire. Notre problème aurait alors une dimension stochastique de vingt, ce qui commence à être trop grand pour mettre en œuvre des méthodes probabilistes ou fiabilistes, en raison du grand nombre de simulations que cela impliquerait. Nous allons donc d'abord, dans le chapitre 2, travailler à réduire le nombre de paramètres sur lesquels il est nécessaire de prendre en compte l'aléa en nous servant d'analyses de sensibilité, avant de construire un modèle de substitution du modèle microscopique du LMDC dans le chapitre 3.

## CHAPITRE II

# Réduction de la dimension stochastique d'un modèle microscopique par analyses de sensibilité



<b>II.1</b>	<b>INTRODUCTION .....</b>	<b>54</b>
<b>II.2</b>	<b>LES METHODES D'ANALYSE DE SENSIBILITE .....</b>	<b>54</b>
II.2.1	METHODE DES NUAGES DE POINTS.....	55
II.2.2	METHODES DE DECOMPOSITION DE VARIANCE .....	55
II.2.3	METHODE « FOURIER AMPLITUDE SENSITIVITY TEST (FAST) » .....	55
II.2.4	METHODE DE DEVELOPPEMENT EN CHAOS POLYNOMIAL .....	56
II.2.5	METHODE « ONE-AT-A-TIME (OAT) » .....	56
II.2.6	METHODES LOCALES .....	56
II.2.7	METHODE D'ANALYSE PAR REGRESSION .....	56
II.2.8	METHODES DE « SCREENING » .....	57
II.2.9	CHOIX D'UNE METHODE D'ANALYSE DE SENSIBILITE .....	57
<b>II.3</b>	<b>PRESENTATION DE LA METHODE DE MORRIS.....</b>	<b>58</b>
II.3.1	TRAJECTOIRES ET EFFETS ELEMENTAIRES (EE) .....	58
II.3.2	INDICATEURS DE MORRIS ET SELECTION DE VARIABLES .....	60
II.3.3	ALGORITHME DE LA METHODE DE MORRIS POUR SORTIES MULTIPLES.....	62
<b>II.4</b>	<b>VARIABLES D'ENTREE INDEPENDANTES DU MODELE ET PLAGES DE VARIATION .....</b>	<b>64</b>
II.4.1	SYNTHESE DES RESULTATS DES ESSAIS ACCELERES SUR SONG LOULOU.....	64
II.4.2	RECALAGE DES PLAGES DE VARIATION .....	66
<b>II.5</b>	<b>ANALYSE DE SENSIBILITE EN CONDITIONS ACCELEREES .....</b>	<b>69</b>
II.5.1	VOLUME DE GEL EN FONCTION DU TEMPS $V_g(T)$ .....	69
II.5.2	GONFLEMENT VOLUMIQUE EN FONCTION DU TEMPS $E_v(T)$ .....	72
II.5.3	VITESSE DE GONFLEMENT VOLUMIQUE EN FONCTION DU TEMPS $E'_v(T)$ .....	73
II.5.4	DIVERS POURCENTAGES DU GONFLEMENT MAXIMAL $\%E_{VMAX}$ .....	74
II.5.5	TEMPS POUR ATTEINDRE DIVERS POURCENTAGES DU GONFLEMENT MAXIMAL $T_{\%E_{VMAX}}$ .....	75
II.5.6	BILAN DES ANALYSES DE SENSIBILITES EFFECTUEES EN CONDITIONS ACCELEREES.....	76
<b>II.6</b>	<b>PASSAGE DES CONDITIONS ACCELEREES AUX CONDITIONS ATMOSPHERIQUES .....</b>	<b>77</b>
II.6.1	EQUATIONS DE THERMOACTIVATION .....	77
II.6.2	VERIFICATION DE L'EFFET DE LA PRISE EN COMPTE DE LA THERMOACTIVATION .....	78
<b>II.7</b>	<b>ANALYSES DE SENSIBILITE EN CONDITIONS ATMOSPHERIQUES.....</b>	<b>80</b>
II.7.1	ANALYSES DE SENSIBILITE A 29 °C.....	80
II.7.2	ANALYSES DE SENSIBILITE A 10 °C.....	81
II.7.3	ANALYSES DE SENSIBILITE A LA TEMPERATURE VARIABLE DE SONG LOULOU .....	82
<b>II.8</b>	<b>SYNTHESE .....</b>	<b>83</b>

## II.1 Introduction

D'une manière générale, que ce soit pour les approches probabilistes ou fiabilistes comme pour la construction de modèles de substitution, le nombre de variables aléatoires à considérer fait considérablement augmenter le nombre de simulation requises. Pour réduire ce nombre, on ne considère l'aléa que sur les variables d'entrée mal maîtrisées et ayant une forte incidence sur la sortie, se contentant de la valeur moyenne pour celles ayant un très faible impact sur la réponse du modèle. Ainsi, une analyse de sensibilité permet de déterminer la dimension stochastique efficace d'un modèle, nombre minimal de variables d'entrée pour lesquelles l'aléa est considéré. Dans un premier temps, une brève revue bibliographique des méthodes d'analyse de sensibilité permettra d'expliquer le choix de la méthode de Morris. Cette méthode permet d'évaluer la moyenne et la variance des effets élémentaires de chaque variable d'entrée sur la réponse globale du modèle. Dans un second temps, la méthode de Morris est détaillée et l'algorithme de son implémentation indiqué. Dans un troisième temps, les plages de variations de chaque paramètre d'entrée sont définies à partir de la littérature, et surtout par recalage sur des courbes d'essais accélérés LPC N°44 effectués sur des échantillons prélevés du barrage de prise et de l'évacuateur de crue de Song Loulou à l'aide de simulation de Monte Carlo. Dans un quatrième temps, les résultats des analyses de sensibilité effectuées en conditions de l'essai accéléré sur plusieurs sorties sont présentés. Nous nous sommes notamment intéressés au volume de gel créé, au gonflement induit du volume élémentaire représentatif (VER), à divers pourcentages du gonflement maximal (5, 25, 50, 75, 90, 95, et 100%), ainsi qu'au temps pour atteindre chaque pourcentage. Dans un cinquième temps, les équations de thermoactivation à intégrer au modèle pour passer des conditions accélérées aux conditions atmosphériques sont données. Dans un sixième temps, les résultats des analyses de sensibilité à 29 °C, 10 °C, et à la température variable de Song Loulou sont détaillés. Un bilan des diverses analyses effectuées clôturera ce chapitre.

## II.2 Les méthodes d'analyse de sensibilité

Les méthodes d'analyse de sensibilité permettent d'étudier les répercussions des variations des paramètres d'entrée (dus aux incertitudes) sur la sortie d'un modèle. Elles peuvent donc être utilisées pour :

- Améliorer la compréhension des relations entre les entrées et la sortie d'un modèle ;
- Tester la robustesse d'un modèle en présence d'incertitude ;
- Réduire les incertitudes à travers l'identification des paramètres d'entrée dont les incertitudes impactent significativement la sortie et dont on devrait améliorer la connaissance ;
- Simplifier un modèle par l'identification et la suppression de parties redondantes de sa structure et/ou en fixant les entrées du modèle qui ont peu d'effets sur sa réponse ;

- Chercher les erreurs dans le modèle en mettant en exergue des relations inattendues entre entrées et sortie ;
- Identifier les liens importants entre les observations, les entrées du modèle et les prédictions, menant à l'amélioration du modèle ;
- Etre plus efficace lors du calibrage de modèle ayant un grand nombre de variables en se focalisant sur les paramètres importants ;
- Améliorer la communication entre les modélisateurs et les décideurs.

Il existe un grand nombre de méthodes d'analyse de sensibilité qui se distinguent surtout par le type de mesure de sensibilité (dérivées partielles, décomposition de variance, effets élémentaires...). Les méthodes d'analyse de sensibilité sont le sujet de plusieurs ouvrages [Saltelli *et al.* 2004, Saltelli *et al.* 2008, Chastaing *et al.* 2015, Iooss & Saltelli 2017, Kucherenko & Iooss 2017, Prieur & Tarantola 2017], les principales seront discutées dans les paragraphes qui suivent.

### II.2.1 Méthode des nuages de points

C'est une méthode graphique. Elle consiste à représenter des nuages de points des réponses du modèle (sorties) en fonction de variables d'entrée tirées aléatoirement suivant des lois de distributions choisies. Les avantages de cette méthode sont qu'elle donne une indication visuelle directe de la sensibilité et qu'elle s'applique aussi à des données non modélisées.

### II.2.2 Méthodes de décomposition de variance

Elles considèrent les entrées comme des variables aléatoires et s'intéressent seulement à la variance de la sortie. Cette dernière est décomposée en termes attribuables à une entrée ou à un groupe d'entrées. Ces termes représentent la proportion de variance due à une entrée ou un groupe d'entrées et sont appelés indices de Sobol. Pour une entrée  $X_i$  l'indice de Sobol est donné par le rapport de la variance de l'espérance mathématique de la sortie  $Y$  sachant  $X_i$  par la variance de la sortie  $Y$  :

$$S_i = \frac{V(E[Y|X_i])}{V(Y)} \quad \text{Eqn II.1}$$

L'indice de Sobol Total, qui prend en compte toutes les interactions dans lesquelles  $X_i$  est impliquée est donné par :

$$S_i^T = 1 - \frac{V(E[Y|X_{\sim i}])}{V(Y)} \quad \text{avec, } X_{\sim i} = (X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_p) \quad \text{Eqn II.2}$$

### II.2.3 Méthode « Fourier Amplitude Sensitivity Test (FAST) »

Il s'agit d'approcher le modèle par des harmoniques en utilisant la transformation de Fourier. Les indices de Sobol sont alors exprimés analytiquement en fonction des coefficients de la série de Fourier.

#### II.2.4 Méthode de développement en chaos polynomial

Le principe est de projeter le modèle sur une base de polynômes orthogonaux. Les indices de Sobol sont alors exprimés analytiquement en fonction des coefficients de cette décomposition.

#### II.2.5 Méthode « One-at-a-time (OAT) »

Elle consiste à modifier les entrées une par une ("One-At-a-Time" : OAT), les autres restant fixées à une valeur de référence. On voit alors l'effet que cela produit sur la sortie. La sensibilité peut ensuite être mesurée par la surveillance des changements dans la sortie, par exemple, par les dérivées partielles ou de régression linéaire. Cela semble logique que tout changement observé dans la sortie puisse être attribué sans ambiguïté à la seule variable changée. En outre, en modifiant une variable à la fois, on peut garder toutes les autres variables fixes à leurs valeurs centrales ou à leurs valeurs de référence respectives. Cela accroît la comparabilité des résultats (tous les "effets" sont calculés en référence au même point "central" dans l'espace des entrées). La méthode OAT est souvent préférée par les modélisateurs pour des raisons pratiques. Cependant, malgré sa simplicité, cette approche ne permet pas d'explorer totalement l'espace des entrées. En effet, elle ne tient pas compte de la variation simultanée (dépendance) de variables d'entrée. De plus, le choix de la valeur nominale et de l'échantillonnage peut poser problème.

#### II.2.6 Méthodes locales

Les méthodes locales utilisent les dérivées partielles de la sortie Y par rapport à une entrée  $X_i$  en un point fixe  $x^F$  dans l'espace des entrées :

$$\left| \frac{\partial Y}{\partial X_i} \right|_{x^F} \quad \text{Eqn II.3}$$

Les méthodes locales n'essayent pas d'explorer l'espace des entrées, mais examinent seulement les petites perturbations, généralement une variable à la fois. La Modélisation adjointe et Différenciation automatisée sont des méthodes de ce type.

#### II.2.7 Méthode d'analyse par régression

L'analyse par régression, dans le contexte de l'analyse de sensibilité, consiste à utiliser les coefficients de régression standardisés comme des mesures directes de la sensibilité. La régression doit être linéaire par rapport aux données. Sinon il est difficile d'interpréter les coefficients standardisés. Cette méthode est donc plus appropriée lorsque le modèle de réponse est en fait linéaire ; la linéarité peut être confirmée, par exemple, si le coefficient de détermination est grand. Les avantages de l'analyse par régression sont qu'elle est simple et a un faible coût de calcul.

### II.2.8 Méthodes de « screening »

Elles s'appliquent à des modèles de grande dimension pour lesquels on veut distinguer rapidement quelles entrées sont significatives mais sans chercher l'exhaustivité. Il s'agit d'observer l'effet de perturbations élémentaires des entrées sur les sorties. La méthode de Morris est la plus connue de cette famille.

### II.2.9 Choix d'une méthode d'analyse de sensibilité

La figure ci-dessous donne quelques indications pour choisir une méthode d'analyse de sensibilité.

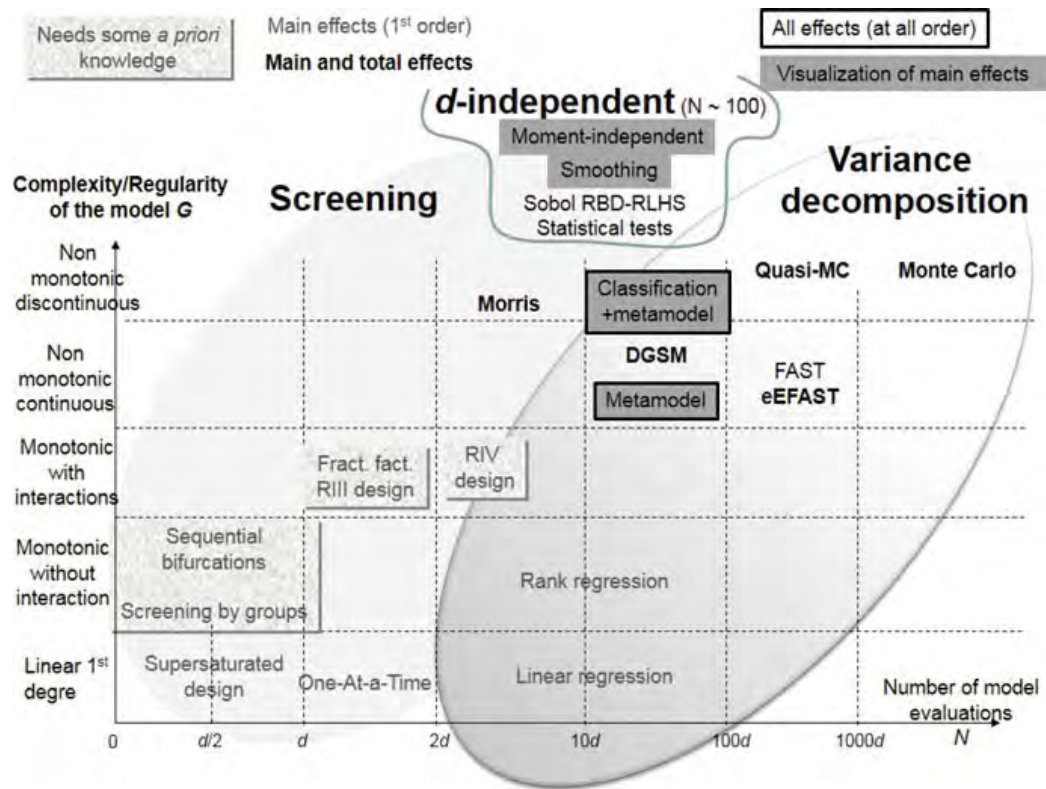


Figure II.1 : Classification des méthodes d'analyse de sensibilité relativement à la complexité et au nombre de simulations du modèle [Iooss & Saltelli 2017]

Les analyses de sensibilité qui seront effectuées dans ce chapitre sur le modèle microscopique de RAG du LMDC, d'une certaine complexité, et avec un coût de calcul moyen, ont pour principal but de déterminer les variables de fortes influences sur lesquelles considérer l'aléa. Dans ces conditions, la méthode de Morris semble la plus indiquée.



### II.3 Présentation de la méthode de Morris

Cette méthode [Morris 1991 , Cropp & Braddock 2002a, Campolongo *et al.* 2007 , Ruano *et al.* 2012 , King & Perera 2013] permet de classer des variables d'entrée selon leur importance au regard de leur influence sur la réponse d'un modèle. Elle s'appuie sur l'hypothèse qu'en faisant varier tour à tour des paramètres du même pas relatif (One-At-a-Time Sensitive Analysis\* Design), celui qui cause la plus grande variation sur la sortie est le plus important.

#### II.3.1 Trajectoires et Effets Élémentaires (EE)

La première étape consiste à construire des trajectoires, bases du plan d'expérience qui permettra de calculer les effets élémentaires et les paramètres de Morris. Pour ce faire, pour chacune des  $k$  variables d'entrées, on divise son intervalle de variation en  $p$  niveaux ( $p > k$ ) pour partir du minimum au maximum avec un pas (ou perturbation)  $\Delta = \frac{1}{p-1}$ . Ensuite, on construit  $r$  trajectoires constituées chacune de  $k + 1$  points et de leurs réponses respectives, le premier point étant tiré aléatoirement et les  $k$  autres calculés tels qu'une seule des  $k$  variables ne change de  $\pm\Delta$  d'un point calculé à un autre. Ainsi, chaque trajectoire permet de déterminer un Effet Élémentaire (EE) de chacune des entrées suivant l'expression :

$$EE_i = \frac{f(X_1, \dots, X_i + \Delta, \dots, X_k) - f(X_1, \dots, X_i, \dots, X_k)}{\Delta} \quad \text{Eqn II.4}$$

La Figure II.2 illustre bien la notion de trajectoire, ici  $P_0 - P_1 - P_2$ , et le calcul des effets élémentaires de chacune des 2 variables d'entrée considérées. Le point de départ  $P_0$  de la trajectoire est tiré aléatoirement parmi les 36 points possibles. On constate bien que les passages de  $P_0$  à  $P_1$ , puis  $P_1$  à  $P_2$  se font un à la fois, avec un pas relatif  $+\Delta$  sur  $X_1$ , puis  $+\Delta$  sur  $X_2$ .

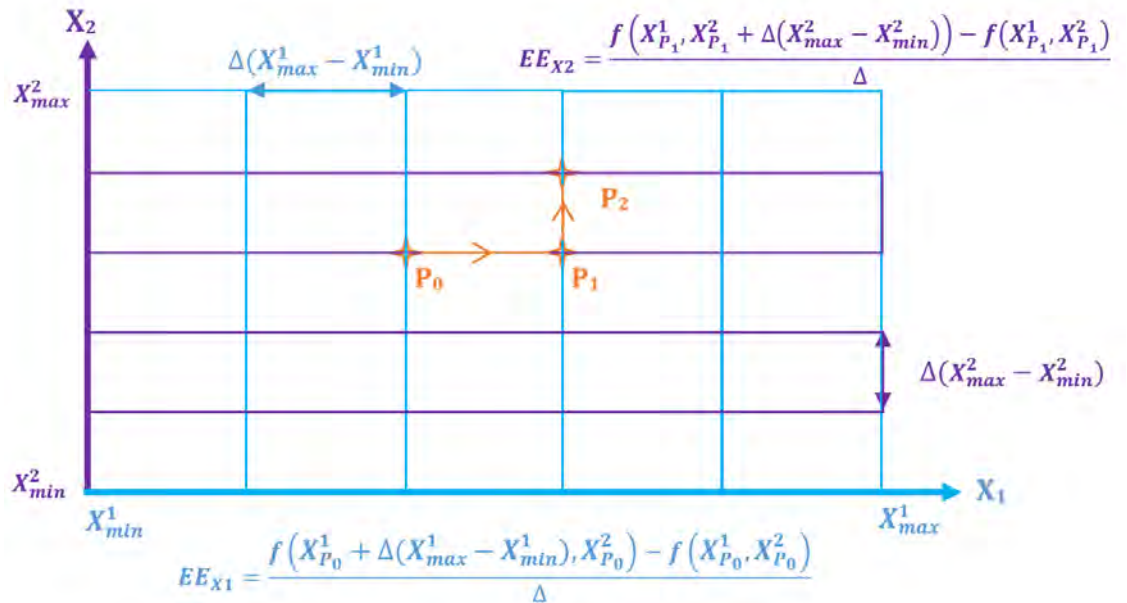


Figure II.2 : Exemple d'effets élémentaires pour  $k=2$ ,  $r=1$ ,  $p=6$  ( $\Delta=0,2$ )

Le calcul des indicateurs de Morris requiert plusieurs effets élémentaires par variables donc le calcul de plusieurs trajectoires. La Figure II.3 présente 7 trajectoires pour deux variables ( $r = 7, k = 2$ ), en indiquant les expressions de quelques-uns des effets élémentaires qui en découlent.

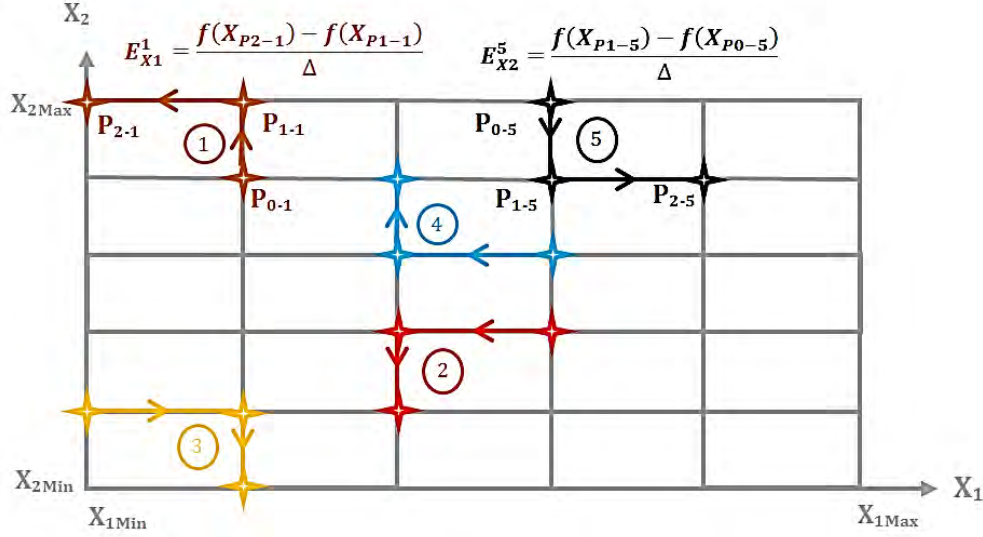


Figure II.3 : Exemple d'effets élémentaires pour  $k=2, r=5, p=6$  ( $\Delta=0,2$ )

Le premier point de chacune de ces trajectoires est tiré aléatoirement et les deux autres (il y a  $k + 1 = 3$  points par trajectoire) sont calculés de manière à n'avoir qu'une variation relative de  $\pm\Delta$  entre deux points consécutifs.

Plus généralement, une trajectoire peut être construite par calcul matriciel. Soient la matrice triangulaire inférieure  $B$ :

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{(k+1) \times k} \quad \text{Eqn II.5}$$

La matrice unité  $J$  :

$$J = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{(k+1) \times k} \quad \text{Eqn II.6}$$

La matrice diagonale  $D^*$  dont la diagonale prend aléatoirement les valeurs 1 et -1.

$$D^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 \end{bmatrix}_{(k \times k)} \quad \text{Eqn II.7}$$

La matrice aléatoire  $P^*$  telle que chaque colonne et chaque ligne ne contienne qu'un seul élément égal à 1 et le reste égal à 0.

$$P^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 1 & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots \end{bmatrix}_{k \times k} \quad \text{Eqn II.8}$$

$X_{1 \times k}^*$  le premier point de la trajectoire tiré aléatoirement, et  $B_{(k+1) \times k}^*$  la matrice finale tels que :

$$B_{(k+1) \times k}^* = J_{(k+1) \times 1} \cdot X_{1 \times k}^* + (\Delta/2) \cdot [(2B_{(k+1) \times k} - J_{(k+1) \times k}) \cdot D_{k \times k}^* + J_{(k+1) \times k}] \cdot P_{k \times k}^* \quad \text{Eqn II.9}$$

Les points de la trajectoire sont donnés par :

$$X_{i=1,2,\dots,k+1;j=1,2,\dots,k}^{i,j} = X_{min}^j + B_{i,j}^* (X_{max}^j - X_{min}^j) \quad \text{Eqn II.10}$$

Une fois que les couples  $(X, f(X))$  de chaque point de l'ensemble des trajectoires sont calculés, ainsi que les effets élémentaires, on peut évaluer les indicateurs de Morris utiles au tri des variables.

### II.3.2 Indicateurs de Morris et sélection de variables

Ils sont calculés à partir des statistiques sur les effets élémentaires. Le nombre de trajectoires requis est celui à partir duquel ces indicateurs convergent. Plus ce nombre est grand, plus les résultats sont précis, mais le coût de calcul augmente aussi.

Les effets élémentaires pouvant être positifs ou négatifs, la moyenne absolue est préférée à la moyenne simple.

- Moyenne absolue :

$$\mu_i^* = \frac{\sum_{j=1}^r |EE_{i,j}|}{r} \quad \text{Eqn II.11}$$

- Ecart-type :

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{(r-1)} \times \sum_{j=1}^r (EE_{i,j} - \mu_i^*)^2} \quad \text{Eqn II.12}$$

Ces deux indicateurs sont représentés sur un graphe comme celui donné en exemple sur la [Figure II.4](#). Les paramètres  $X_i$  ayant les moyennes absolues  $\mu_i^*$  et les écart-types  $\sigma_i$  les plus élevés, respectivement les plus faibles, sont ceux ayant une forte respectivement faible influence. Compte tenu de la présence d'une zone d'influence indéterminée que l'utilisation des deux indicateurs précédents peut faire apparaître (exemple sur la [Figure II.4](#)), l'indice de sensibilité globale a été proposé pour un tri plus efficace [Sobol & Gresham 1995, Ngo 2015]. Cet indice est borné entre 0 et 1 et son expression est la suivante :

$$S_i^* = \frac{\mu_i^{*2} + \sigma_i^2}{\sum_{i=1}^n (\mu_i^{*2} + \sigma_i^2)}$$

Eqn II.13

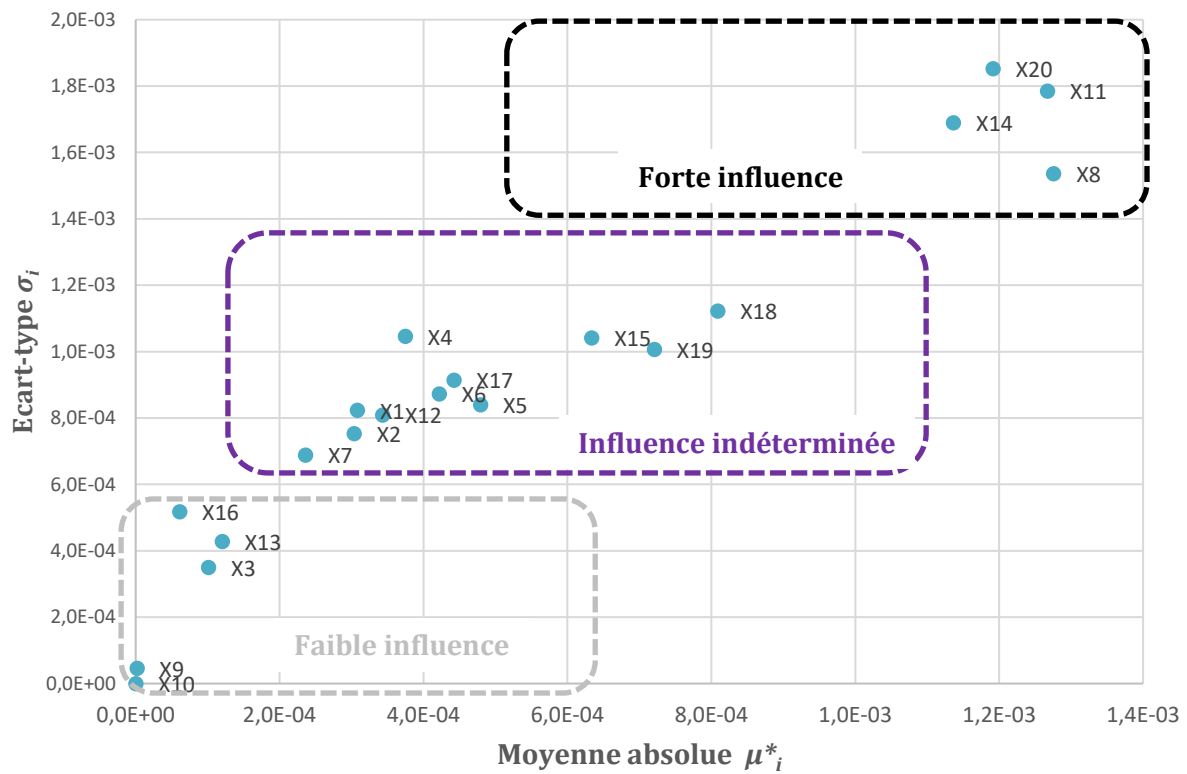


Figure II.4 : Utilisation de la moyenne absolue et l'écart-type pour la sélection de variables

La Figure II.5 illustre comment cet indice est utilisé pour la détermination des variables ayant une forte influence sur la réponse d'un modèle donné.

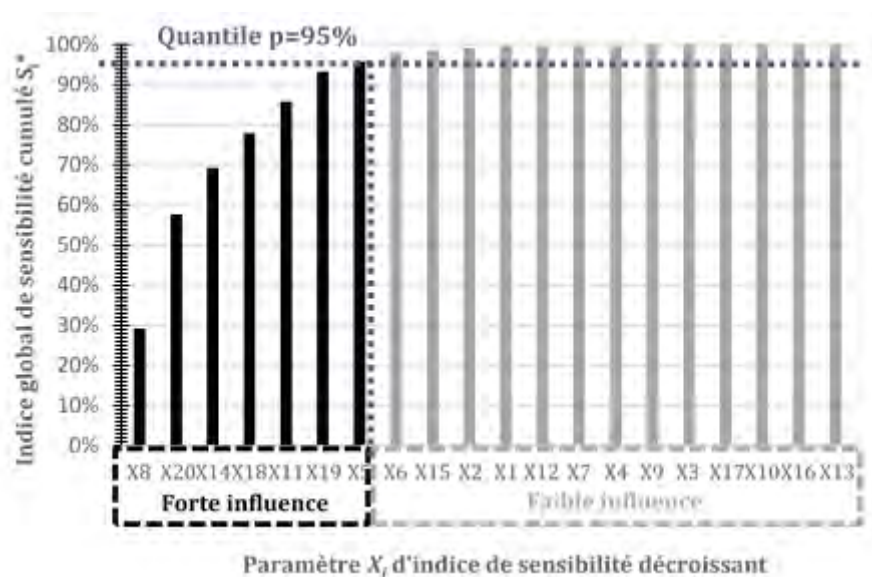


Figure II.5 : Utilisation de l'indice de sensibilité global pour la sélection de variables

Toutes les variables ayant un indice global de sensibilité ordonné cumulé inférieur ou égal à une valeur seuil (ici 95%) ont une forte influence, et le reste une faible influence.

Les valeurs de seuil usuelles sont soit de 90% pour une fenêtre de sélection étroite, ou de 99% pour une large fenêtre de sélection.

### **II.3.3 Algorithme de la méthode de Morris pour sorties multiples**

Les analyses de sensibilité étant prévues sur des sorties multiples, il est nécessaire d'ajouter une étape à la méthode de Morris présentée dans la littérature pour agréger les indicateurs de chaque sortie. Le tableau ci-après indique l'algorithme qui a été implémenté en java pour l'ensemble des analyses de sensibilité.

Tableau II.1 : Algorithme de la méthode de Morris pour sorties multiples

**Entrées :**  $k$ , nombre de variables d'entrées ;  $X_{min}^i$  et  $X_{max}^i$ , valeurs minimales et maximales respectives des variables  $X_i$  avec  $i = 1, \dots, k$  ;  $p$  tel que  $p > k$ , nombre de niveaux de chaque intervalle de variation ;  $r$ , nombre de trajectoires ;  $n$ , nombre de sortie pour le cas des sorties multiples ;  $S_{thv}$ , valeur seuil pour l'analyse de sensibilité.

**Sorties :** Variables importantes

**Début**

Initialiser la matrice triangulaire inférieure  $B_{(k+1) \times k}$  (Eqn II.5)

Initialiser la matrice unité  $J_{(k+1) \times k}$  (Eqn II.6)

Initialiser la matrice diagonale  $D_{k \times k}^*$  (Eqn II.7) dont la diagonale prend aléatoirement les valeurs 1 et -1

Initialiser la matrice  $P_{k \times k}^*$  (Eqn II.8) telle que chaque colonne et chaque ligne ne contienne qu'un seul élément égal à 1 et le reste égal à 0

Calculer  $\Delta = \frac{1}{p-1}$

Construire le vecteur des niveaux  $Vn[l] = \frac{l-1}{p-1}, l = 1, \dots, p$

**Pour m=1 à r Faire**

Pour chaque variable, tirer aléatoirement une valeur de  $Vn$  ; l'ensemble des  $k$  valeurs obtenues constituent le vecteur  $X_{1 \times k}^*$  des coordonnées du point initial dans l'espace standard.

Calculer  $B_{(k+1) \times k}^*$  suivant l'équation (Eqn II.9)

Calculer  $X^{j,i}, i = 1, 2, \dots, k; j = 1, 2, \dots, k + 1$  suivant l'équation (Eqn II.10)

Calculer  $f(X_i)$  de chacun des  $k + 1$  points de la trajectoire

Calculer les effets élémentaires  $EE_i = \frac{f(X_{i+1}) - f(X_i)}{\Delta}, i = 1, 2, \dots, k$

**Fin pour**

Calculer les moyennes absolues  $\mu_i^*$  sur  $r$  des  $EE_i$  (Eqn II.11)

Calculer les écart-types  $\sigma_i$  sur  $r$  des  $EE_i$  (Eqn II.12)

Calculer l'indice de sensibilité globale  $S_i^*$  de chaque variable (Eqn II.13)

**Si sortie unique**

Classer  $S_i^*$  dans l'ordre décroissant et cumuler

Sélectionner les variables qui ont un indice de sensibilité globale cumulé décroissant inférieur à  $S_{thv}$

**Sinon**

Calculer la fréquence  $f_{S_i^*}$  de  $S_i^*$  de chaque variable sur toutes les sorties (Eqn II.14)

Classer  $f_{S_i^*}$  dans l'ordre décroissant et cumuler

Sélectionner les variables qui ont une fréquence cumulée inférieur à  $S_{thv}$

**Fin Si**

**Retour**

**Fin**

$$f_{S_i^*} = 100 \frac{\sum_{j=1}^n S_i^j}{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n S_i^j} \quad \text{Eqn II.14}$$

où  $k$  est le nombre de variables d'entrées et  $n$  le nombre de sorties étudiées.

Pour une sortie unique, les variables dont l'indice de sensibilité global cumulé décroissant est inférieur à une valeur seuil sont retenues. Pour les sorties multiples, nous additionnons les indices de sensibilité globaux de chaque variable sur toutes les sorties ; nous calculons la fréquence décroissante cumulée de chaque somme ; nous sélectionnons ensuite les variables dont la fréquence décroissante cumulée est inférieure à une valeur seuil. Généralement, les valeurs de seuil utilisées dans l'analyse de sensibilité sont de 90% pour une fenêtre de sélection étroite ou de

99% pour une grande fenêtre de sélection. Dans les applications données dans la partie suivante, nous choisissons une fenêtre de sélection étroite.

#### II.4 Variables d'entrée indépendantes du modèle et plages de variation

L'étude du modèle microscopique de RAG du LMDC, présentée dans le chapitre précédent, nous a permis de recenser 20 variables d'entrée indépendantes, sachant que nous avons considéré que la plus petite classe granulaire (sable) a des propriétés physico chimiques différentes des classes moyennes et grandes (graviers et cailloux), contrairement à l'hypothèse de similitude faite habituellement [Poyet *et al.* 2007 , Ichikawa 2009 , Multon *et al.* 2009 , Gao 2010 , Charpin & Ehrlacher 2012 , Gao, Multon, *et al.* 2013 , Multon & Sellier 2016]. Cette hypothèse est basée sur les données de construction du barrage de Song Loulou et des observations pétrographiques effectuées en 2011, consignées dans des documents internes de l'entreprise *eneo-The energy of Cameroon*. Le **Tableau II.2** contient des indications sur les vingt variables d'entrée du modèle. Les 7 premières variables ( $X_1$  à  $X_7$ ) sont des paramètres physiques déduits de la formulation du béton. Les plages retenues pour ces derniers sont en concordance avec les informations recoupées de la documentation de Song Loulou. La plage de variation de la porosité du mortier découle des mesures effectuées sur des éprouvettes extraites du barrage (**Figure II.6**) par l'IFSTTAR pour l'entreprise *eneo*, à travers le cabinet d'expertise ISL. Nous avons ensuite procédé à une recherche bibliographique pour définir les plages de variations sur chacune des 12 autres variables [Poyet *et al.* 2007 , Multon *et al.* 2009 , Gao 2010 , Sanchez, Multon, *et al.* 2014 ]. En plus de ces quatre références utilisées pour toutes les variables, nous avons utilisé des références spécifiques pour certaines variables : les plages pour la concentration initiale en alcalin "CNA0" et le volume molaire de gel "VMGEL" proviennent de [Taylor 1997], et pour les deux coefficient de diffusion des granulats "DIFFG", les plages retenues sont de [Goto & Roy 1981]. Le **Tableau II.2** contient les plages initiales obtenues. Avant d'utiliser ces plages de variations dans une analyse de sensibilité, il est important de vérifier qu'elles produisent des résultats en conformité avec les valeurs expérimentales présentées dans le paragraphe ci-après.

##### II.4.1 Synthèse des résultats des essais accélérés sur Song Loulou

Suite à une étude commandée auprès du cabinet d'experts ISL, des échantillons ont été prélevés du barrage de prise et de l'évacuateur de crue de Song Loulou pour subir différents tests au rang desquels l'essai de gonflement accéléré LPC N°44 réalisé par l'IFSTTAR en 2011.





Figure II.6 : Echantillons extraits du barrage de SL pour essais LPC N°44, Guedon - IFSTTAR 2010

Les ouvrages de l'aménagement hydroélectrique de Song Loulou sont présentés dans le paragraphe V.4.1 et en Annexe E. Les codes attribués aux points d'extraction sont indiqués ci-après : C45-1 (à la base du contrefort 45), C45-2 (sur la galerie aval du plot 4), C45-3 (sur la galerie haute du plot 4), C45-4 (sur la galerie amont du plot 4), P12-1 (sur le sommet de la pile 12), P12-2 (sur le bajoyer rive droite de la passe1, depuis la passerelle du bras de la vanne), P12-3 (sur le côté aval de la galerie axe de la pile 12), C01-2 (sur la galerie aval du plot 1), P34-1 (sur le sommet de la pile 34 vers l'amont), P34-4 (sur le sommet du parement aval de la pile 34).

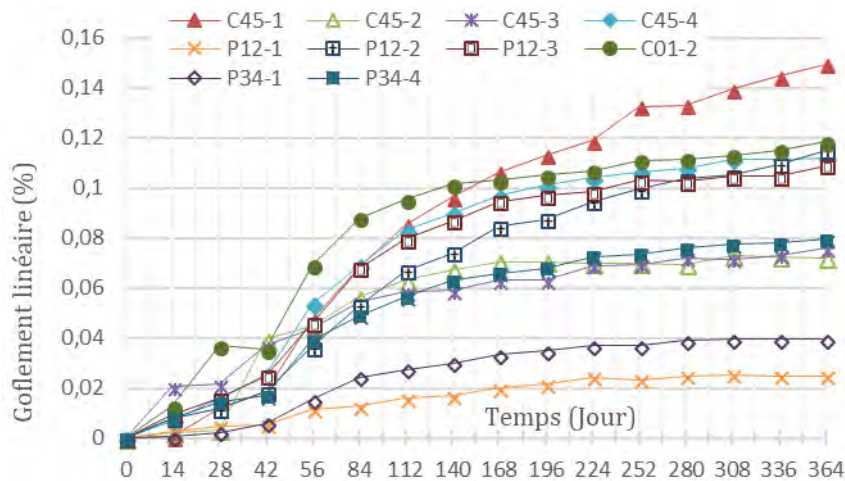


Figure II.7 : Résultats essais accélérés sur 10 échantillons prélevés dans le barrage

La Figure II.7, adaptée de [Guillemot *et al.* 2013], récapitule les résultats obtenus. Nous avons retenu comme valeurs expérimentales, les courbes des échantillons C45-1, P12-1 et P12-2 qui ont été extraites dans les zones qui nous intéressent et englobent à peu près l'ensemble des autres courbes.

Nous avons considéré que les résultats expérimentaux obtenus pour les essais accélérés sur l'éprouvette C45-1, prélevée dans une zone sèche où il y a eu peu de RAG, sont suffisamment

représentatifs de la totalité de la cinétique réelle de la RAG dans le béton de Song Loulou. La part de RAG ayant eu lieu avant extraction est ainsi négligée. Cette simplification s'est imposée sans toutes les garanties, à cause de la rareté des données. Pour mieux déterminer la cinétique réelle, on aurait pu soit exploiter les indices de fissuration du béton (malheureusement inexistant) tels que précisé dans [Fasseu *et al.* 2003] et [Fournier *et al.* 2010], soit procéder à des essais accélérés sur des éprouvettes reconstituées à partir de granulats sains extraits de carottes suivant les indications de [Sellier *et al.* 2009], qui permettent d'obtenir une cinétique plus pertinente caractéristique de la RAG dans les ouvrages existants.

Le paragraphe suivant établit la comparaison entre ces valeurs expérimentales et la tendance globale des résultats obtenus avec les plages des vingt variables définies précédemment ainsi que le recalage effectué.

#### II.4.2 Recalage des plages de variation

Nous avons effectué une simulation de Monte Carlo en faisant 10 000 tirages aléatoires sur des distributions uniformes dans les intervalles définis précédemment pour chacune des 20 variables. Nous avons ensuite déterminé les valeurs minimales, moyennes et maximales de l'ensemble pour vérifier que les plages d'entrées choisies donnaient des réponses encadrant les valeurs expérimentales. Ayant constaté que les valeurs déterminées étaient très éloignées des valeurs expérimentales, elles ont été classées, 5% des valeurs extrêmes (cumul des valeurs minimales et maximales) ont été supprimées, et les valeurs minimales (moyennes et maximales) obtenues sont présentées sur la figure ci-après.

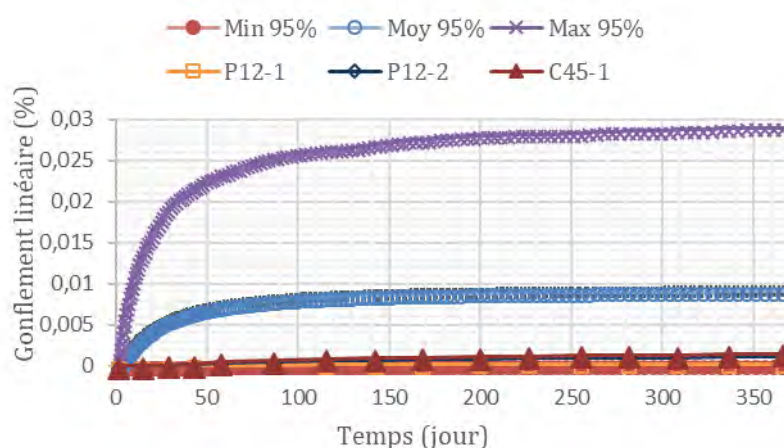


Figure II.8 : Cinétiques de gonflement Min- Moy et Max pour 10 000 tirages - p=95% - Plages initiales

Nous constatons sur la Figure II.8 que la majorité des cinétiques obtenues avec nos plages de valeurs sont très éloignées des cinétiques expérimentales, malgré le retrait des 5% de valeurs aux extrémités. Nous avons donc décidé d'affiner nos intervalles initiaux en les faisant varier et en faisant 2 000 simulations pour chaque nouvelle vingtaine d'intervalles. Les valeurs minimales,

moyennes et maximales obtenues à chaque simulation étaient comparées aux valeurs expérimentales. Une fois que les valeurs calculées ont bien enveloppé les courbes expérimentales, nous avons complété le nombre de simulation à 18 000. La figure ci-après, tracée à partir des statistiques découlant de ces simulations montre qu'on encadre bien les valeurs expérimentales surtout avec le quantile de 95%.

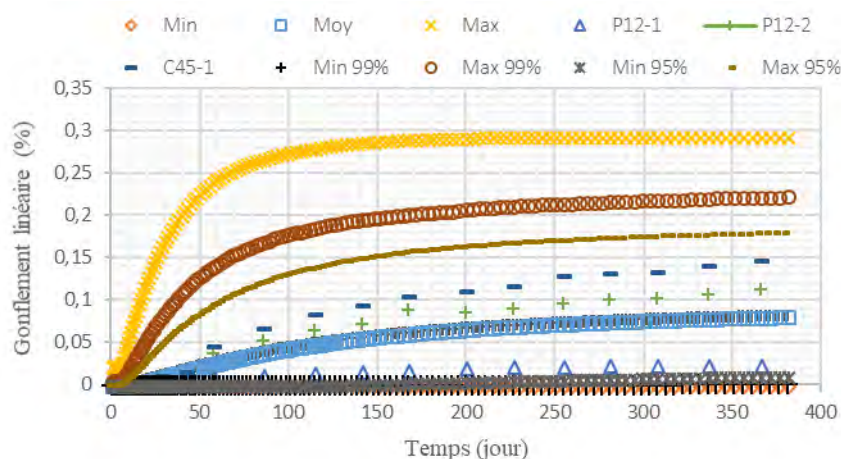


Figure II.9 : Cinétiques de gonflement Min- Moy et Max pour 18 000 tirages - p=95%, 99%, 100% - Plages finales

Les plages correspondantes sont reportées sur le [Tableau II.2](#). Il est à noter que les sept premières variables ( $X_1$  à  $X_7$ ), déduites de la formulation du béton de Song Loulou (en conformité avec [De Larrard 2000]) ont été maintenues constantes, et que seules les 13 autres ont fait l'objet de variations. Cela permettrait d'être le plus proche possible de la réalité. De plus, nous avons constaté que le fait de considérer que la plus petite classe granulaire (sable) a des propriétés physico-chimiques différentes des classes moyennes et grandes (graviers et cailloux), permet d'obtenir des allures de cinétiques plus proches des cinétiques expérimentales surtout en fin de réaction (voir [Figure II.9](#)).

Les plages finales, indiquées dans le [Tableau II.2](#), sont celles que nous utiliserons dans la suite du travail pour nos analyses de sensibilité.

Tableau II.2 : Plages de variations recalées des variables d'entrées du modèle [Multon *et al.* 2009]

Paramètres du béton						
V.A	Description	Abréviation	Symbole	Plage initiale	Plage finale	Unité
X <sub>1</sub>	Diamètre minimal de la plus petite classe granulaire	DMIN(1)	$R_{(a=1,2,3)} = \frac{DMIN(a) + DMAX(a)}{2}$	0 à 2	0 à 2	mm
X <sub>2</sub>	Diamètre minimal de la classe granulaire intermédiaire	DMIN(2) = DMAX (1)		4 à 6	4 à 6	mm
X <sub>3</sub>	Diamètre minimal de la plus grande classe granulaire	DMIN(3) = DMAX (2)		10 à 20	10 à 20	mm
X <sub>4</sub>	Diamètre maximal de la plus grande classe granulaire	DMAX(3)		32 à 125	32 à 125	mm
X <sub>5</sub>	Concentration volumique de granulat par m³ de béton	CONGRA	$C_{agg}$	0.6 à 0.75	0.6 à 0.75	-
X <sub>6</sub>	Fraction de la plus petite classe granulaire dans les granulats	FRAGRA(1)	$\phi_{(a=1,2,3)} = \text{Function of (FRAGRA(a), SILSOL(a))}$	0.25 à 0.55	0.25 à 0.55	-
X <sub>7</sub>	Fraction de la classe granulaire intermédiaire dans les granulats	FRAGRA(2) = FRAGRA(3)		0.05 à 0.25	0.05 à 0.25	-
Paramètres Physico-chimiques						
V.A	Description	Abréviation	Symbole	Plage initiale	Plage finale	Unité
X <sub>8</sub>	Concentration initiale d'alcalin dans la pâte de ciment	CNA0	$C_{Na}^{cp}$	100 à 800	100 à 250	mol/m <sub>3</sub>
X <sub>9</sub>	Quantité de silice soluble pour la plus petite classe granulaire (Sable)	SILSOL(1)	$\phi_{(a=1,2,3)} = \text{Function of (FRAGRA(a), SILSOL(a))}$	1000 à 5000	1000 à 3000	mol/m <sup>3</sup> de gran.
X <sub>10</sub>	Quantité de silice soluble prise identique pour les autres classes granulaires et réactivité moyenne	SILSOL(2) = SILSOL(3)		1000 à 5000	1000 à 3000	mol/m <sup>3</sup> de gran.
X <sub>11</sub>	Porosité du mortier	POROMO	$P_{mort}$	0.1 à 0.3	0.1 à 0.3	-
X <sub>12</sub>	Porosité des petits granulats	POROG(1)	$P_{agg1}$	0.01 à 0.05	0.01 à 0.05	-
X <sub>13</sub>	Porosité des granulats prise identique pour les autres classes granulaires	POROG(2) = POROG(3)	$P_{agg2,3}$	0.01 à 0.05	0.01 à 0.05	-
X <sub>14</sub>	Distance sur laquelle le gel peut migrer pour les petits granulats	COLC(1)	$t_{c(a=1)}$	1 à 15	1 à 10	µm
X <sub>15</sub>	Distance sur laquelle le gel peut migrer pour les autres granulats	COLC(2) = COLC(3)	$t_{c(a=2,3)}$	1 à 15	1 à 10	µm
X <sub>16</sub>	Coefficients de diffusion des alcalins pour les petits granulats	DIFFG(1)	$D_{(a=1)}$	2.10 <sup>-13</sup> à 7.10 <sup>-13</sup>	2.10 <sup>-13</sup> à 7.10 <sup>-13</sup>	m²/s
X <sub>17</sub>	Coefficients de diffusion des alcalins pour les autres granulats	DIFFG(2) = DIFFG(3)	$D_{(a=2,3)}$	2.10 <sup>-13</sup> à 7.10 <sup>-13</sup>	2.10 <sup>-13</sup> à 7.10 <sup>-13</sup>	m²/s
paramètres du gel de RAG						
V.A	Description	Abréviation	Symbole	Plage initiale	Plage finale	Unité
X <sub>18</sub>	Volume molaire du gel créé	VMGEL	$V_{gel}^{mol}$	1.10 <sup>-5</sup> à 10.10 <sup>-5</sup>	1.10 <sup>-5</sup> à 1,6.10 <sup>-5</sup>	m³/mol
X <sub>19</sub>	Nombre de mole de Na réagissant avec 1 mole de Si pour former le gel (dépends de Na <sub>2</sub> O <sub>eq</sub> /SiO <sub>2</sub> )	RNSc	$\text{Ratio } Na_2O/SiO_2$	0,2 à 0,8	0,39 à 0,59	-
X <sub>20</sub>	Coef. de fixation des alcalins pris idem pour toutes les classes	FIXNA	$f$	-1.10 <sup>-7</sup> à -1.10 <sup>-9</sup>	-1.10 <sup>-7</sup> à -1.10 <sup>-9</sup>	m³/m³/s

## II.5 Analyse de sensibilité en conditions accélérées

Le modèle de RAG de [Multon *et al.* 2009] rend compte de la production de gel au cours de l'essai accéléré LPC N° 44 sur une éprouvette à 38 °C et 100% d'humidité relative. En considérant les plages de variation précédemment définies pour les variables d'entrée, nous avons utilisé la méthode de Morris, avec les paramètres  $k = 20, r = 600, p = 81$  ( $\Delta = 0,0125$ ), pour étudier leurs incidences respectives sur diverses grandeurs d'intérêt déduites du modèle étudié. Nous rappelons que nous avons utilisé trois classes granulaires lors de l'implémentation du modèle. Les chiffres 1, 2 et 3 sont associés aux petite, moyenne et grande classes respectivement. Les sorties calculées sont :

- Volume de gel créé au cours du temps et donné par le modèle,  $V_g(t) = \sum_{i=1}^3 V_{gi}(t)$  ;
- Gonflement volumique engendré par ce dernier,  $\varepsilon_V(t) = \sum_{i=1}^3 \frac{V_{gi}(t)}{V_{VERi}}$  ;
- Vitesse de gonflement au cours du temps,  $\varepsilon'_V(t) = \frac{\varepsilon_V(t) - \varepsilon_V(t - \Delta t)}{\Delta t}$  ;
- Divers pourcentages du gonflement maximal,  $\% \varepsilon_{VMax}$  ;
- Temps pour atteindre divers pourcentages du gonflement maximal,  $t_{\% \varepsilon_{VMax}}$ .

Pour chacune d'entre elles, nous avons calculé les indices globaux de sensibilité ordonnés cumulés dans diverses conditions qui sont précisées pour chaque cas.

### II.5.1 Volume de gel en fonction du temps $V_g(t)$

Cette analyse a été réalisée pour 4 dates différentes, à savoir : 10, 100, 180 et 365 jours, afin de couvrir régulièrement la durée du test accéléré de RAG. La Figure II.10 illustre le résultat obtenu à 365 jours. Le coefficient de fixation des alcalins "FIXNA" et le diamètre des cailloux "DMAX(3)" peuvent être considérés comme variables influentes, puisque leur indice de sensibilité global ordonné cumulé est inférieur à 90% ( $S_{thv} = 90\%$ ), (barres d'histogrammes noires).

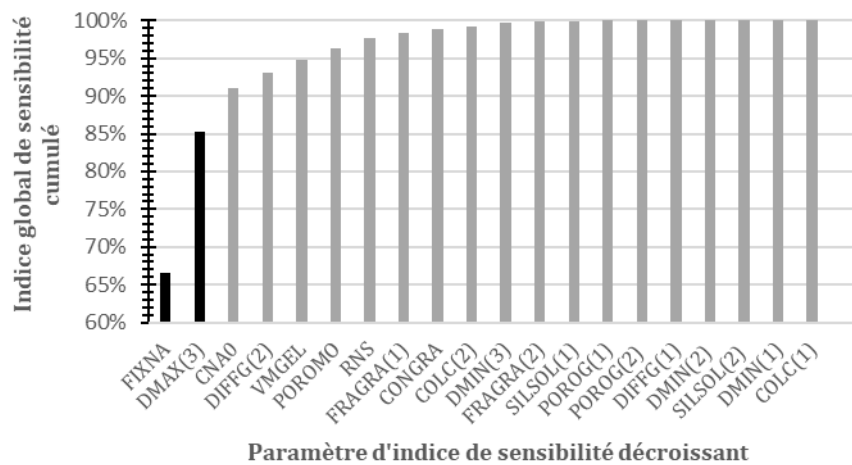


Figure II.10 : Indice global de sensibilité cumulé de  $V_g(t)$  à 365 jours en conditions accélérées



La Figure II.11 représente les indices de sensibilité globaux obtenus pour le volume de gel à nos différentes échéances. Bien qu'ils ne soient pas encore cumulés, on peut observer le classement des variables importantes pour chacune des cinq dates.

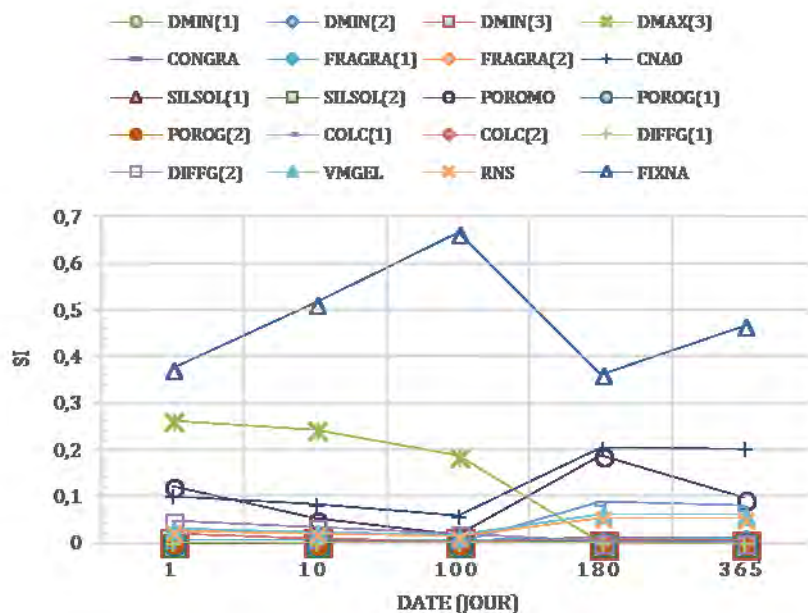


Figure II.11 : Classement des variables en fonctions de leur impact sur  $V_g(t)$  à diverses échéances en conditions accélérées

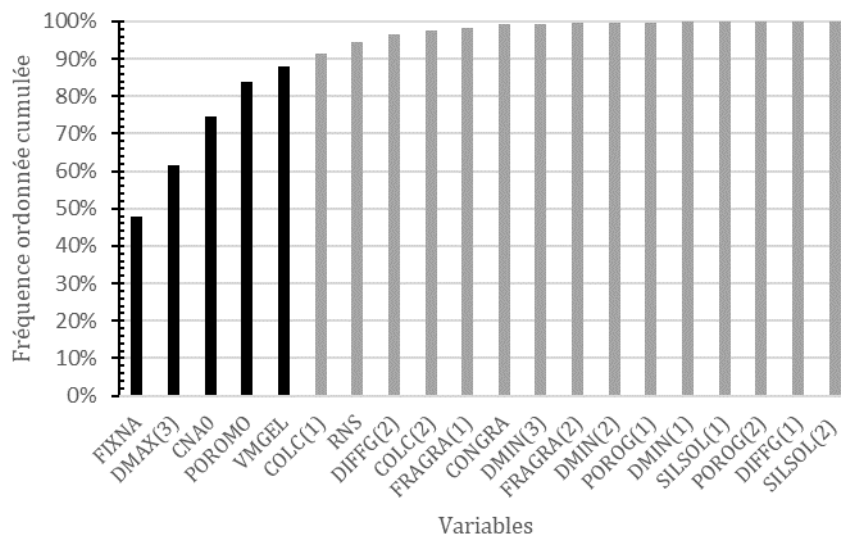
L'indice de sensibilité global du coefficient de fixation des alcalins "FIXNA" est supérieur aux autres quelles que soient les échéances. Le diamètre maximal des cailloux "DMAX(3)" voit son importance diminuer après 100 jours, tandis que la porosité du mortier et 3 autres paramètres voient leur importance augmenter après 100 jours.

Par la suite, une procédure a été proposée pour combiner la sensibilité à différents moments dans un indicateur global. Pour chaque variable, la somme des indices de sensibilité globale a été calculée à toutes les dates étudiées  $\sum_t S_i^{V_g(t)} = S_i^{V_g(1)} + S_i^{V_g(10)} + S_i^{V_g(100)} + S_i^{V_g(180)} + S_i^{V_g(365)}$  (voir Tableau II.3). La fréquence  $f_{S_i^*} = 100 \frac{\sum_t S_i^{V_g(t)}}{\sum_i (\sum_t S_i^{V_g(t)})}$  des  $S_i^*$  de chaque variable sur toutes les sorties a été déduite. Les variables sont triées de manière décroissante avec ce dernier indicateur. Les deux dernières colonnes du Tableau II.3 indiquent la fréquence ordonnée cumulée  $f_{S_i^*oc}$ , dont la comparaison au seuil conduit à une sélection des variables les plus influentes qui sont celles avec  $f_{S_i^*oc} \leq S_{thv} = 90\%$ . Le seuil pour une fenêtre de sélection étroite est choisi pour « compenser » le fait que le cumul de sorties augmente naturellement le nombre de variables influentes.

Tableau II.3 : Fréquences cumulées sur la somme des indices de sensibilité globaux de  $V_g(t)$  sur toutes les échéances

Description	$\sum_t S_t^{V_g(t)}$	$f_{S_i^*}$ (%)	$f_{S_i^{oc}}$ (%)	S.V.
<b>DMIN(1)</b>	0,01	0,11	<b>47,686</b>	<b>FIXNA</b>
<b>DMIN(2)</b>	0,01	0,12	<b>61,591</b>	<b>DMAX(3)</b>
<b>DMIN(3)</b>	0,01	0,28	<b>74,494</b>	<b>CNA0</b>
<b>DMAX(3)</b>	0,70	13,90	<b>84,010</b>	<b>POROMO</b>
<b>CONGRA</b>	0,04	0,75	<b>87,853</b>	<b>VMGEL</b>
<b>FRAGRA(1)</b>	0,04	0,81	91,236	COLC(1)
<b>FRAGRA(2)</b>	0,01	0,13	94,549	RNS
<b>CNA0</b>	0,65	12,90	96,660	DIFFG(2)
<b>SILSOL(1)</b>	0,00	0,07	97,594	COLC(2)
<b>SILSOL(2)</b>	0,00	0,00	98,402	FRAGRA(1)
<b>POROMO</b>	0,48	9,52	99,152	CONGRA
<b>POROG(1)</b>	0,01	0,11	99,430	DMIN(3)
<b>POROG(2)</b>	0,00	0,02	99,555	FRAGRA(2)
<b>COLC(1)</b>	0,17	3,38	99,676	DMIN(2)
<b>COLC(2)</b>	0,05	0,93	99,790	POROG(1)
<b>DIFFG(1)</b>	0,00	0,00	99,902	DMIN(1)
<b>DIFFG(2)</b>	0,11	2,11	99,975	SILSOL(1)
<b>VMGEL</b>	0,19	3,84	99,997	POROG(2)
<b>RNS</b>	0,17	3,31	99,999	DIFFG(1)
<b>FIXNA</b>	2,38	47,69	100,000	SILSOL(2)

Par la suite, nous ne présenterons que les résultats obtenus par cette démarche sous forme de courbe bilan, comme celle présentée ci-après qui correspond au cas traité dans le [Tableau II.3](#). Une discussion sur les résultats obtenus est proposée en synthèse dans la section [II.5.6](#).


 Figure II.12 : Fréquence ordonnée cumulée sur la somme des indices globaux de  $V_g(t)$  sur diverses échéances en conditions accélérées



## II.5.2 Gonflement volumique en fonction du temps $\varepsilon_V(t)$

Cette analyse a été réalisée sur le gonflement volumique pour 5 dates différentes couvrant une période d'un an. La Figure II.13 présente les résultats obtenus pour chacune des 5 dates. La Figure II.14 quant à elle dresse le bilan de sensibilité sur l'ensemble des 5 dates. Les 6 variables de forte influence (en dessous du quantile 90%) sont celles dont les barres d'histogramme ont un motif de couleur noire.

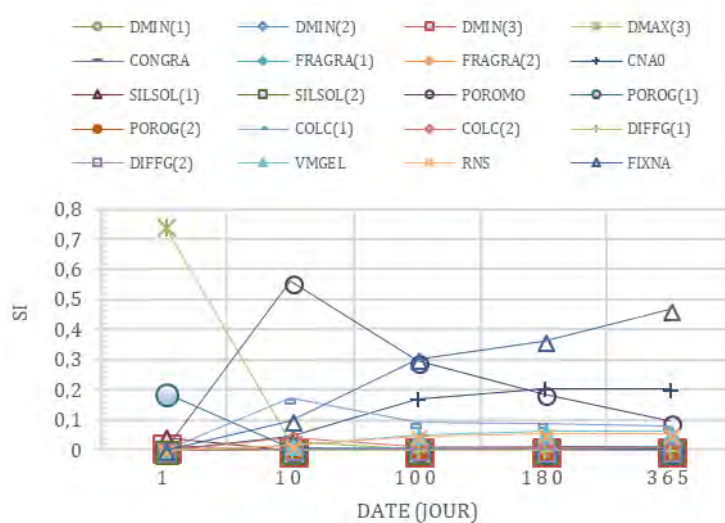


Figure II.13 : Classement des variables en fonctions de leur impact sur  $\varepsilon_V(t)$  à diverses échéances en conditions accélérées

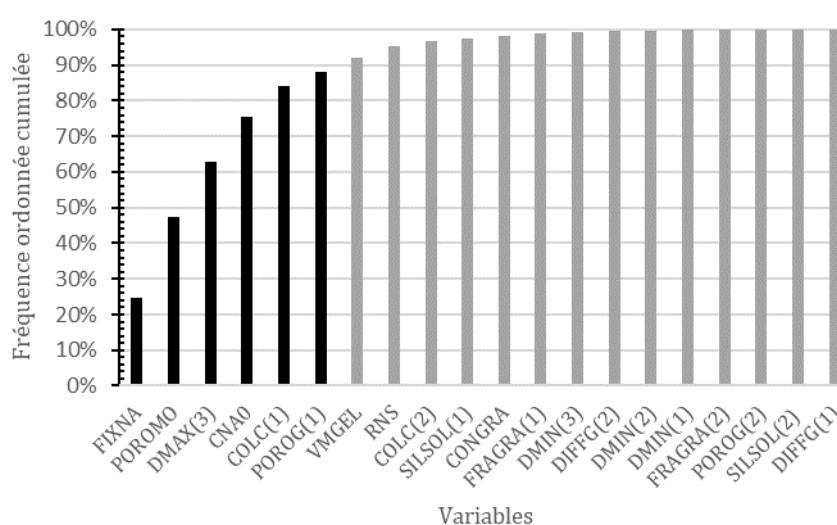


Figure II.14 : Fréquence ordonnée cumulée sur la somme des indices globaux de  $\varepsilon_V(t)$  sur diverses échéances en conditions accélérées

### II.5.3 Vitesse de Gonflement volumique en fonction du temps $\varepsilon'_v(t)$

Cette analyse a été réalisée sur la vitesse gonflement pour 5 dates différentes couvrant une période d'un an. La Figure II.15 présente les résultats obtenus pour chacune des 5 dates. La Figure II.16 quant à elle dresse le bilan de sensibilité sur l'ensemble des 5 dates. Les 4 variables de forte influence (en dessous du quantile 90%) sont celles dont les barres d'histogramme ont un motif de couleur noire.

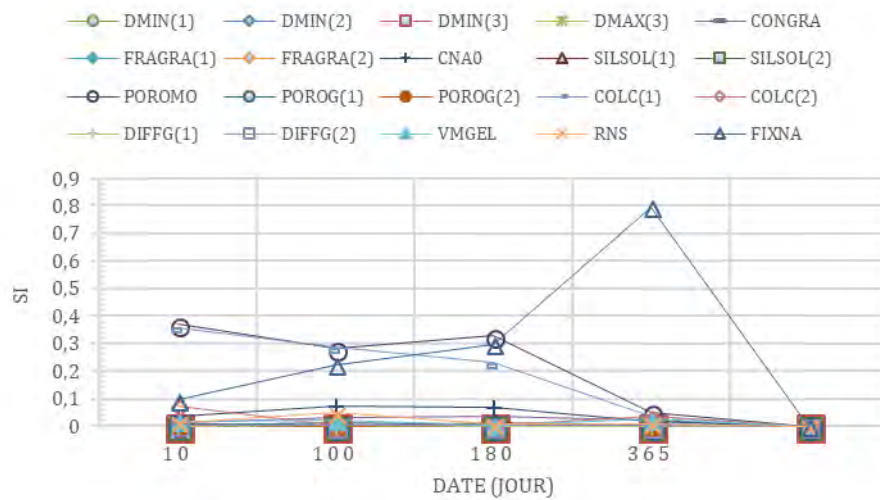


Figure II.15 : Classement des variables en fonctions de leur impact sur  $\varepsilon'_v(t)$  à diverses échéances en conditions accélérées

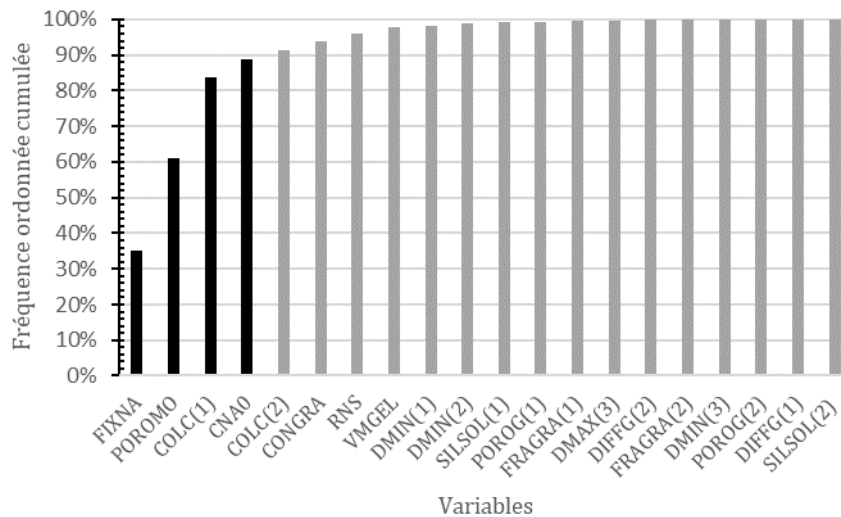


Figure II.16 : Fréquence ordonnée cumulée sur la somme des indices globaux de  $\varepsilon'_v(t)$  sur diverses échéances en conditions accélérées

#### II.5.4 Divers pourcentages du gonflement maximal $\% \varepsilon_{Vmax}$

Cette analyse a été réalisée pour 7 pourcentages différents de gonflement maximal, à savoir : 5, 25, 50, 75, 90, 95, et 100%. La Figure II.17 présente les résultats obtenus pour chacun des 7 pourcentages. La Figure II.18 quant à elle dresse le bilan de sensibilité sur l'ensemble des 7 pourcentages. Les 8 variables de forte influence (en dessous du quantile 90%) sont celles dont les barres d'histogramme ont un motif de couleur noire.

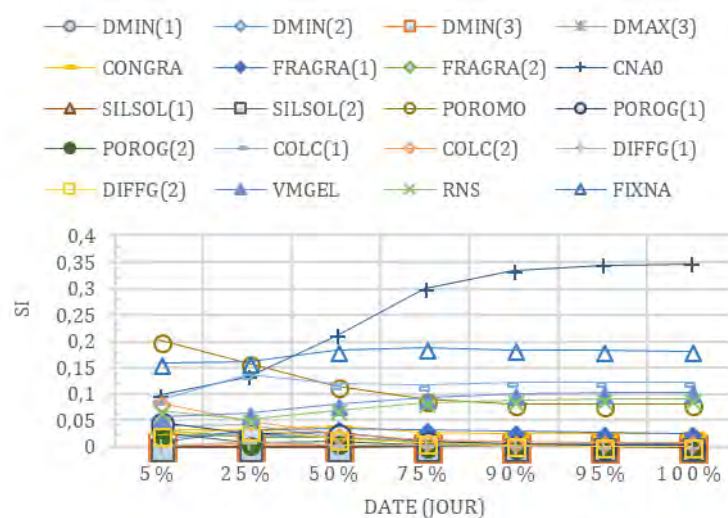


Figure II.17 : Classement des variables en fonctions de leur impact sur  $\% \varepsilon_{Vmax}$  à divers pourcentages en conditions accélérées

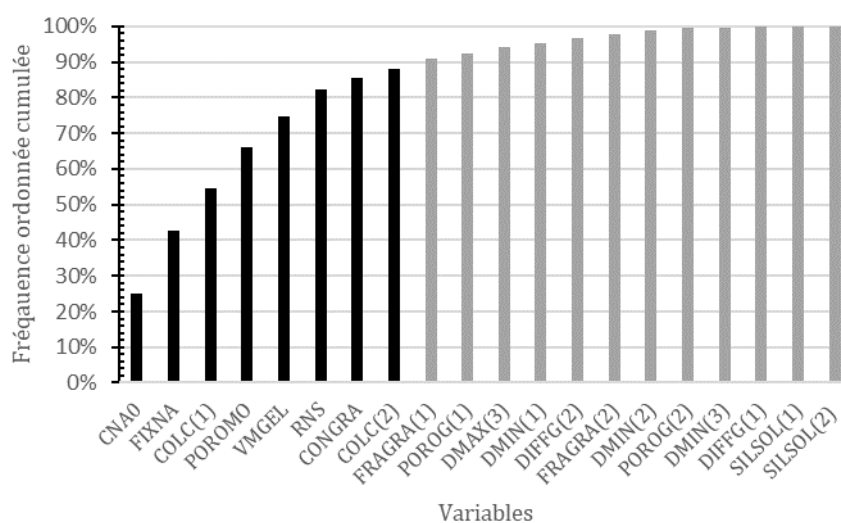


Figure II.18 : Fréquence ordonnée cumulée sur la somme des indices globaux de  $\% \varepsilon_{Vmax}$  sur divers pourcentages en conditions accélérées

### II.5.5 Temps pour atteindre divers pourcentages du gonflement maximal $t_{\% \epsilon VMax}$

La grandeur objet de cette analyse est le temps nécessaire pour atteindre 7 pourcentages différents de gonflement maximal, à savoir : 5, 25, 50, 75, 90, 95, et 100%. La Figure II.19 présente les résultats obtenus pour chacun des 7 pourcentages. La Figure II.20 quant à elle dresse le bilan de sensibilité sur l'ensemble des 7 pourcentages. Les 5 variables de forte influence (en dessous du quantile 90%) sont celles dont les barres d'histogramme ont un motif de couleur noire.

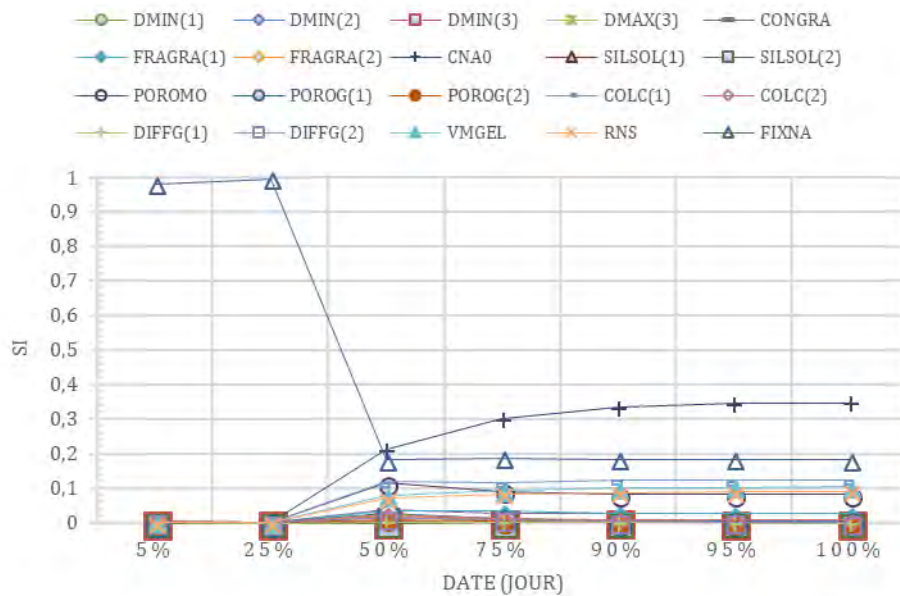


Figure II.19 : Classement des variables en fonctions de leur impact sur  $t_{\% \epsilon VMax}$  à divers pourcentages en conditions accélérées

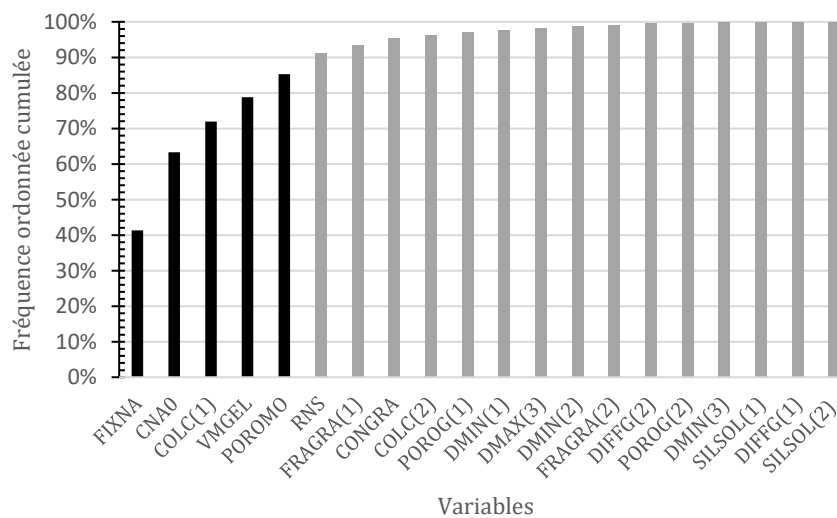


Figure II.20 : Fréquence ordonnée cumulée sur la somme des indices globaux de  $t_{\% \epsilon VMax}$  sur diverses échéances en conditions accélérées

### II.5.6 Bilan des analyses de sensibilités effectuées en conditions accélérées

La figure ci-dessous établit, pour chaque variable, le décompte sur l'ensemble des échéances et pourcentages considérés des résultats des analyses de sensibilités effectuées à 38 °C.

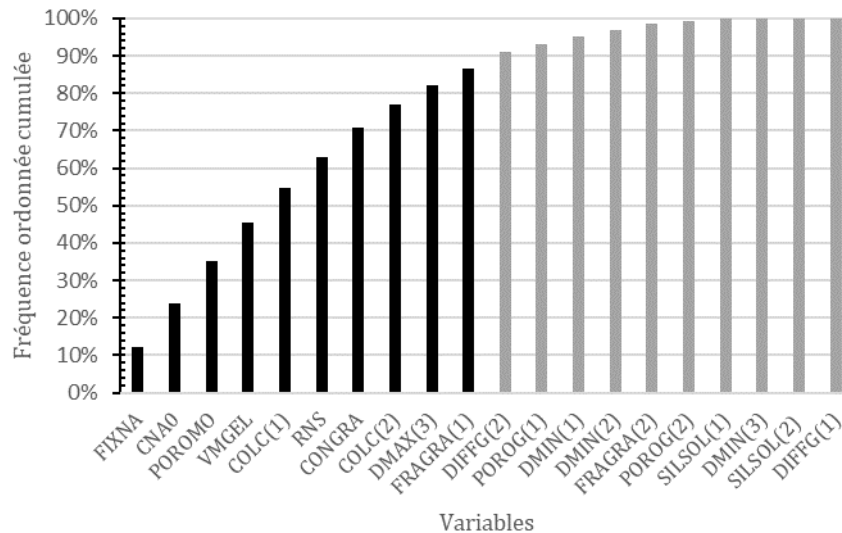


Figure II.21 : Bilan des analyses de sensibilités effectuées en conditions accélérées

Les variables retenues seraient dans l'ordre décroissant : le coefficient de fixation des alcalins ( $\text{FIXNA} = X_{20}$ ), la concentration initiale d'alcalin dans la pâte de ciment ( $\text{CNA0} = X_8$ ), la porosité du mortier ( $\text{POROMO} = X_{11}$ ), le volume molaire du gel crée ( $\text{VMGEL} = X_{18}$ ), la distance sur laquelle le gel peut migrer dans le sable ( $\text{COLC}(1) = X_{14}$ ), le nombre de mole de sodium réagissant avec 1 mole de silice pour former le gel ( $\text{RNSc} = X_{19}$ ), la concentration volumique de granulat par  $\text{m}^3$  de béton ( $\text{CONGRA} = X_5$ ), la distance sur laquelle le gel peut migrer dans les graviers et cailloux ( $\text{COLC}(2) = X_{15}$ ), le diamètre maximal de la plus grande classe granulaire ( $\text{DMAX}(3) = X_4$ ), et la fraction de la plus petite classe granulaire dans les granulats ( $\text{FRAGRA}(1) = X_6$ ).

Il est aussi à noter que le paramètre ayant une incidence prépondérante sur la vitesse de gonflement ainsi que le temps pour atteindre le gonflement maximal est le coefficient de fixation des alcalins. Nous l'utiliserons dans la prochaine section pour tenir compte de la variation de température, dont l'effet majeur est d'augmenter (respectivement réduire) la vitesse quand elle augmente (respectivement diminue).

## II.6 Passage des conditions accélérées aux conditions atmosphériques

L'une des principales différences entre conditions accélérées (38 °C, 100% HR) et conditions atmosphériques (voir la [Figure II.22](#) adapté de [ISL 2011] pour les conditions de Song Loulou) est la température.

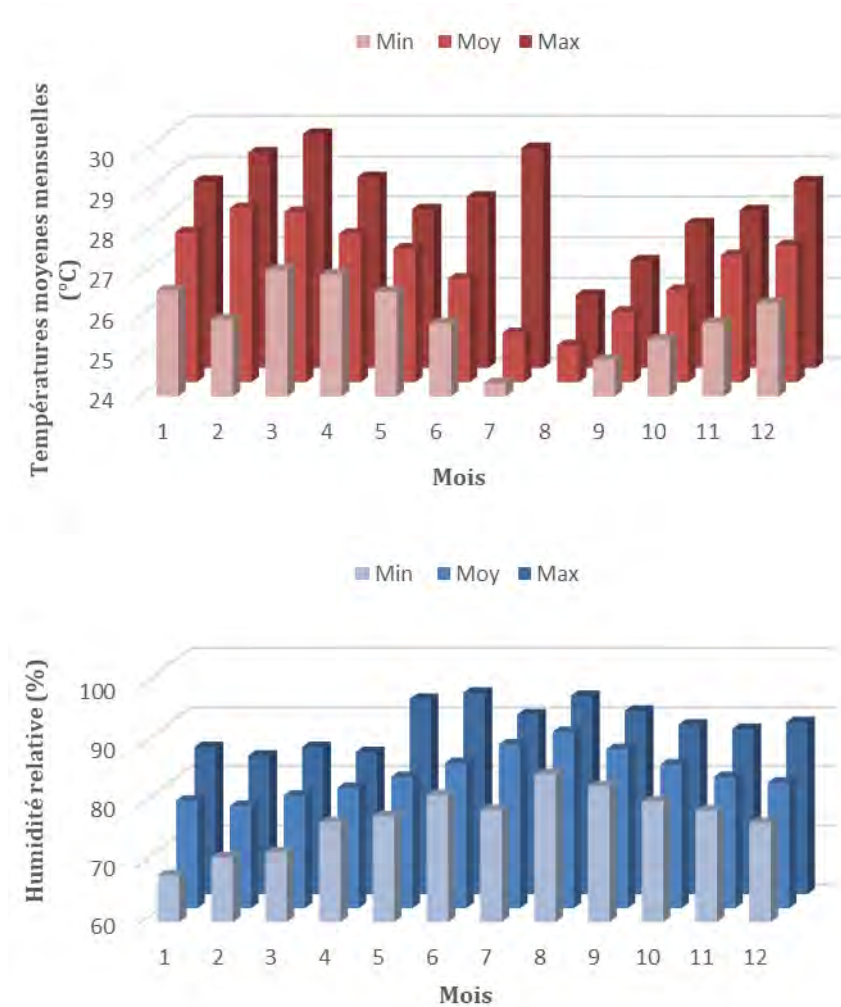


Figure II.22 : Températures et humidités relatives mensuelles sur la période 1975-2008

Les analyses de sensibilité précédentes ont permis de se rendre compte que le coefficient de fixation des alcalins (*Fixna*) est le paramètre dominant tant sur le gonflement dans le temps que sur la vitesse de ce dernier. Cela laisse suggérer qu'en associant la thermoactivation à ce paramètre, on pourrait explicitement intégrer l'effet de la température au modèle étudié et s'en servir comme moyen de passage en conditions atmosphériques.

### II.6.1 Equations de thermoactivation

Etant donné que quand *Fixna* augmente en valeur absolue (diminue en valeur relative, puisqu'étant négatif), le volume de gel ainsi que le gonflement diminuent, on peut utiliser l'équation de thermoactivation suivant une loi d'Arrhenius ci-dessous :



$$Fixna(T) = Fixna_0 e^{\frac{E_A^{Fixna}}{R} \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right)} \quad \text{Eqn II.15}$$

Où :

- $Fixna_0$  est le coefficient de fixation des alcalins à la température de référence  $T_0 = 311^\circ K$ , température en conditions accélérées de l'essai LCP N°44 ;
- $E_A^{Fixna} = 78 KJ.mol^{-1}$ , est l'énergie d'activation de fixation des alcalins, considérée identique à l'énergie de dissolution de la silice déterminée par [Bulteel *et al.* 2002, Kim *et al.* 2015] ;
- $R = 8,314472 J.K^{-1}.mol^{-1}$ , est la constante des gaz parfaits ;
- $T$  est la température réelle en degré Kelvin [K] à laquelle la dégradation a lieu.

Etant établi que la diffusion est un processus physique qui s'accroît avec la température, nous considérons que les coefficients de diffusion des alcalins dans les petits et gros granulats DiffG(1) et DiffG(2) sont thermoactivés suivant la loi d'Arrhenius ci-dessous :

$$DiffG(T) = DiffG_0 e^{-\frac{E_A^{DiffG}}{R} \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right)} \quad \text{Eqn II.16}$$

Où :

- $DiffG_0$  est le coefficient de diffusion des ions  $Na^+$  dans le granulat à la température de référence de l'essai LCP 44  $T_0 = 311^\circ K$
- $E_A^{DiffG} = 20 Kcal.mol^{-1} = 83,68 KJ.mol^{-1}$ , est l'énergie d'activation de diffusion des  $Na^+$  dans la pâte de ciment d'après [Goto & Roy 1981].

L'effet de l'introduction de la thermoactivation sur la prédiction du modèle [Multon *et al.* 2009] a été vérifié dans le paragraphe suivant, en regardant les distributions des temps pour atteindre le gonflement maximal estimés à 38 et 29 °C.

## II.6.2 Vérification de l'effet de la prise en compte de la thermoactivation

A partir des simulations de Monte Carlo effectuées pour le recalage des plages, nous avons estimé la distribution des temps pour atteindre divers pourcentages de gonflement maximal en conditions accélérées (38 °C). La Figure II.23 montre que dans 79% des cas, on atteint 95% du gonflement maximal avant 2 ans et 100% à 5 ans en moyenne.



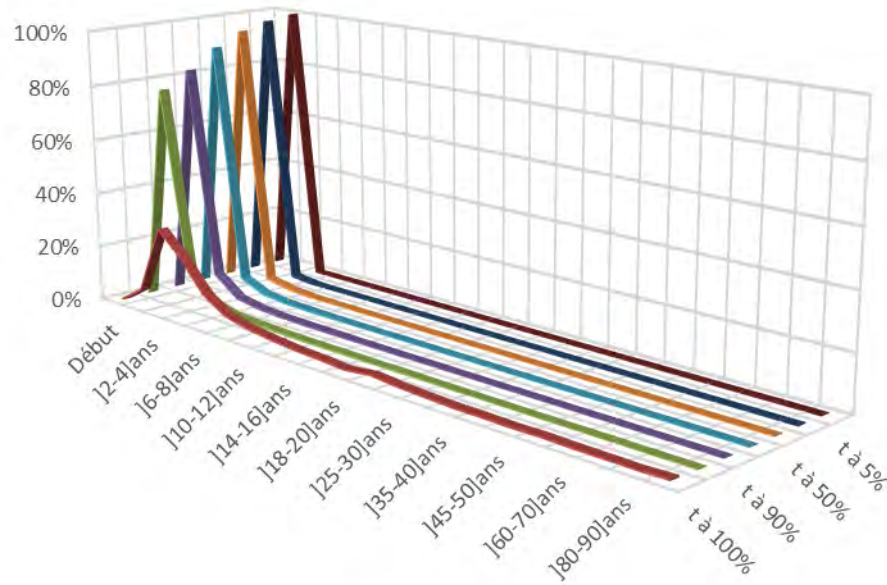


Figure II.23 : Distribution des statistiques sur le temps pour atteindre 7 pourcentages de  $\varepsilon_{VMax}$  à 38 °C pour 18 000 tirages aléatoires

La Figure II.24 donne la distribution des temps pour atteindre divers pourcentages de gonflement maximal en conditions atmosphériques (29 °C).

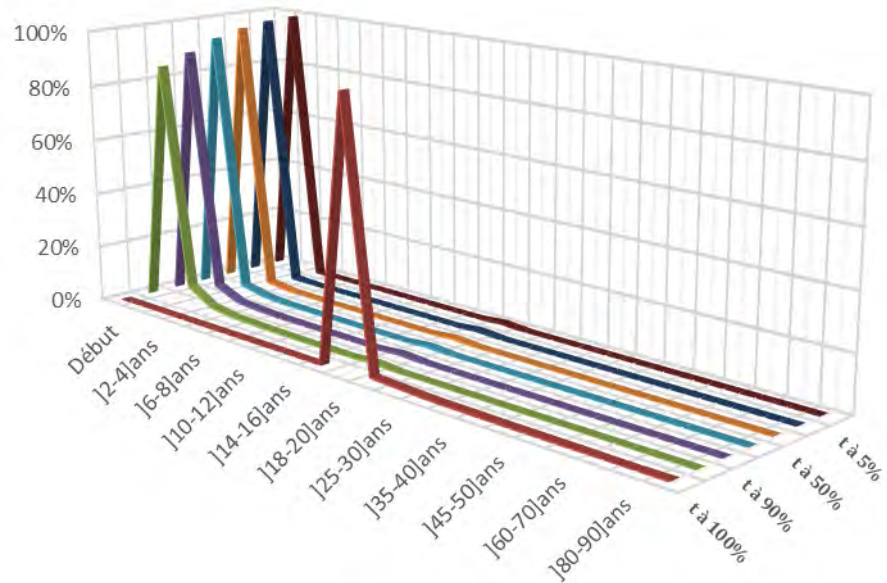


Figure II.24 : Distribution des statistiques sur le temps pour atteindre 7 pourcentages de  $\varepsilon_{VMax}$  à 29 °C pour 10 000 tirages aléatoires

On constate que le temps moyen pour atteindre le gonflement maximal est passé de 5 à 20 ans bien que les autres pourcentages (même 95%) n'aient que très peu changé. Cela montre tout de même que l'intégration de la thermoactivation ralentit la cinétique comme on pourrait s'y attendre lors du passage des conditions accélérées aux conditions atmosphériques.

## II.7 Analyses de sensibilité en conditions atmosphériques

Comme nous l'avons indiqué précédemment, les conditions atmosphériques sont caractérisées par la considération de la température ambiante. Nous avons considéré deux températures : 29 °C (température moyenne maximale à Song Loulou) et 10 °C (Température moyenne de divers autres barrages). Nous avons appliqué la méthode de Morris, avec les paramètres  $k = 20, r = 600, p = 81$  ( $\Delta = 0,0125$ ), en utilisant les mêmes plages de variation que précédemment pour les variables d'entrée, pour étudier leurs incidences respectives sur diverses grandeurs d'intérêt déduites du modèle modifié. Nous rappelons que nous avons utilisé trois classes granulaires lors de l'implémentation du modèle. Les chiffres 1,2 et 3 sont associés aux petite, moyenne et grande classes respectivement. Les sorties calculées sont les mêmes que précédemment:

- Volume de gel créé au cours du temps et donné par le modèle,  $V_g(t) = \sum_{i=1}^3 V_{gi}(t)$  ;
- Gonflement volumique engendré par ce dernier,  $\varepsilon_V(t) = \sum_{i=1}^3 \frac{V_{gi}(t)}{V_{VERi}}$  ;
- Vitesse de gonflement au cours du temps,  $\varepsilon'_V(t) = \frac{\varepsilon_V(t) - \varepsilon_V(t - \Delta t)}{\Delta t}$  ;
- Divers pourcentages du gonflement maximal,  $\% \varepsilon_{VMax}$  ;
- Temps pour atteindre divers pourcentages du gonflement maximal,  $t_{\% \varepsilon_{VMax}}$ .

Pour chacune d'entre elles, nous avons calculé les indices globaux de sensibilité ordonnés cumulés dans diverses conditions qui sont précisées pour chaque cas. Pour chacune des sorties, une figure représentant les indices obtenus pour l'une des configurations (échéance ou pourcentage) est donnée, puis une courbe d'histogramme représentant les fréquences ordonnées cumulées sur l'ensemble des configurations ainsi que les variables en dessous du quantile de 90% (en noir) est présentée. Ces figures se trouvent en [Annexe B](#).

Les bilans globaux sur l'ensemble des 5 sorties étudiées pour les températures de 29° C, 10°C, et la température variable de Song Loulou, sont présentés dans la suite de cette section.

### II.7.1 Analyses de sensibilité à 29 °C

Le détail de ces analyses est donné en [Annexe B](#). Leur synthèse est donnée sur la figure ci-après.

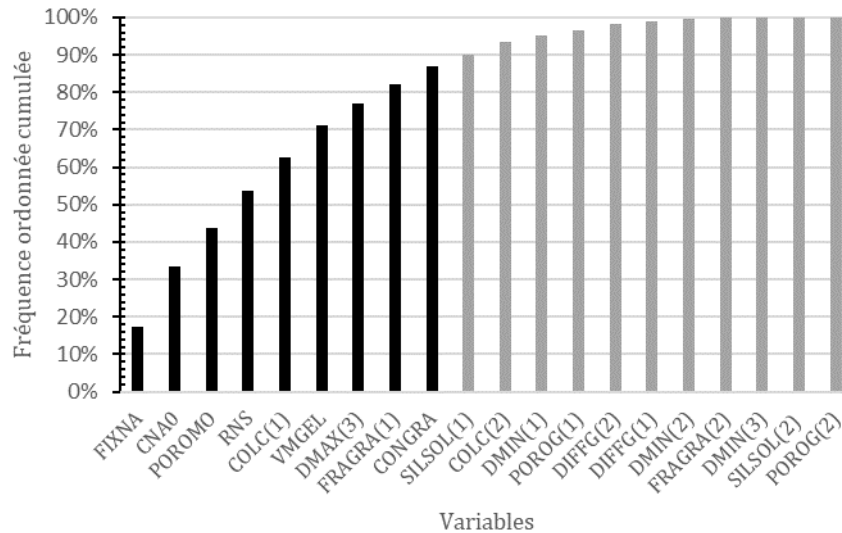


Figure II.25 : Bilan des analyses de sensibilité à 29 °C

Nous remarquerons qu'à une variable près (la distance sur laquelle le gel peut migrer dans les graviers et cailloux "COLC(2)"), les variables de forte influence sont les mêmes que celles obtenues à 38 °C (Figure II.21).

### II.7.2 Analyses de sensibilité à 10 °C

Le détail de ces analyses est donné en Annexe B. Leur synthèse est donnée sur la figure ci-dessous.

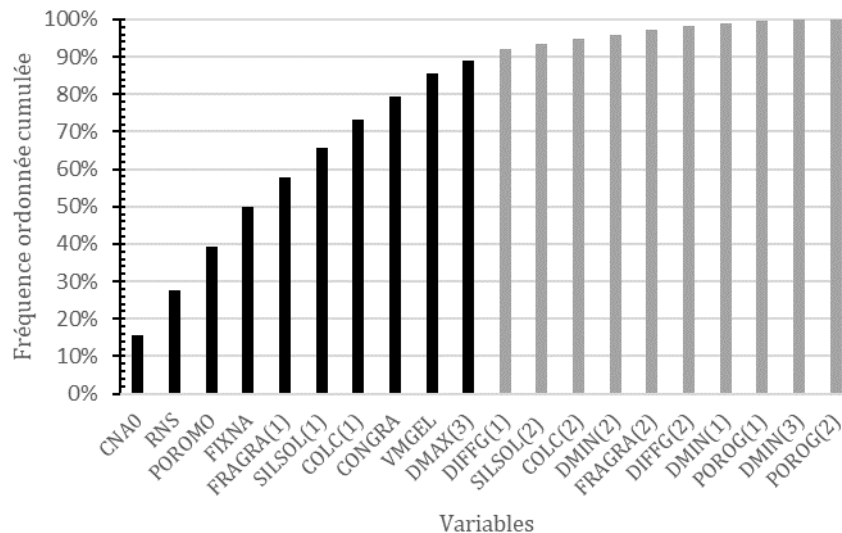


Figure II.26 : Bilan des analyses de sensibilité à 10 °C

Pour le bilan des analyses de sensibilité effectuées à 10 °C, on remarque que la distance sur laquelle le gel peut migrer dans les graviers et cailloux "COLC(2)" est remplacée par la quantité de silice soluble pour le sable "SILSOL(1)", parmi les variables de forte influence. Ces variables sont par ailleurs les mêmes que celles obtenues à 29 °C et à 38 °C (Figure II.21).

### II.7.3 Analyses de sensibilité à la température variable de Song Loulou

Pour ce cas, on considère une valeur de température par mois selon la Figure II.22 lors du calcul dans le temps avec le modèle. Le détail de ces analyses est donné en Annexe B. Leur synthèse est donnée sur la figure ci-dessous.

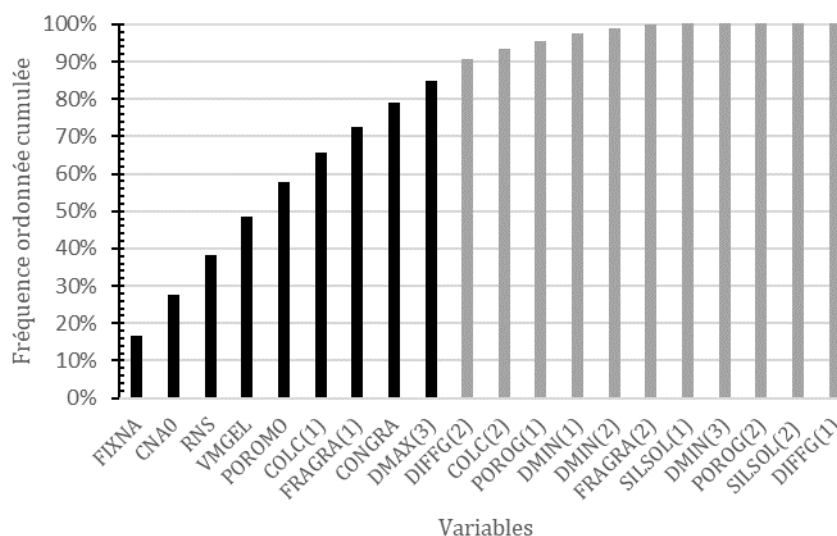


Figure II.27 : Bilan des analyses de sensibilité à la température variable de Song Loulou

Les variables de forte importance obtenues dans ce dernier cas, identiques à la variable "COLC(2)" près à celles mises en exergue aux autres températures, sont celles que nous retiendrons pour la suite du travail. Ce choix est justifié par le fait que l'objectif du travail est, *in fine*, d'évaluer la fiabilité résiduelle du barrage de Song Loulou en tenant compte de ses conditions atmosphériques. Comme on peut le voir sur la figure ci-dessus, les variables à conserver sont : le coefficient de fixation des alcalins (FIXNA =  $X_{20}$ ), la concentration initiale d'alcalin dans la pâte de ciment (CNA0 =  $X_8$ ), le nombre de mole de sodium réagissant avec 1 mole de silice pour former le gel (RNSc =  $X_{19}$ ), le volume molaire du gel crée (VMGEL =  $X_{18}$ ), la porosité du mortier (POROMO =  $X_{11}$ ), la distance sur laquelle le gel peut migrer dans le sable (COLC(1) =  $X_{14}$ ), la fraction de la plus petite classe granulaire dans les granulats (FRAGRA(1) =  $X_6$ ), la concentration volumique de granulat par  $m^3$  de béton (CONGRA =  $X_5$ ), et le diamètre maximal de la plus grande classe granulaire (DMAX(3) =  $X_4$ ).

## II.8 Synthèse

Notre objectif principal dans ce chapitre était de déterminer, au moyen d'analyses de sensibilité, le nombre minimum de paramètres à considérer comme variable aléatoire (dimension stochastique efficace) pour tenir compte des incertitudes sur ces derniers dans la réponse du modèle [Multon *et al.* 2009]. Nous avons donc commencé par faire une revue bibliographique des méthodes d'analyse de sensibilité. Cela nous a permis de choisir la méthode de Morris [Morris 1991, Cropp & Braddock 2002b, Campolongo *et al.* 2007, Ruano *et al.* 2012, King & Perera 2013], compte tenu du nombre de paramètres du modèle d'étude (vingt), et de la relative rapidité de calcul de ce dernier. Pour chaque paramètre d'entrée, nous avons défini une plage de variation à partir d'une revue de la littérature et de données de formulation du béton de Song Loulou. En considérant des distributions uniformes des variables d'entrée sur les intervalles définis, nous avons fait des simulations de Monte Carlo pour observer la répartition des réponses du modèle par rapport aux courbes d'essais accélérés LPC N°44 effectués sur des échantillons prélevés du barrage de prise et de l'évacuateur de crue de Song Loulou. Pour ce faire, nous avons modifié le code du modèle ayant déjà été implémenté sous Fortran, pour qu'il lise les données d'entrée du modèle dans un fichier, créé préalablement par un algorithme de tirage aléatoire implémenté en java ; qu'il calcule et sauvegarde les différentes réponses correspondantes dans un fichier de sortie. Nous avons ensuite affiné les intervalles sur les entrées en procédant par essai-erreur en faisant 2 000 simulations pour chaque nouvel intervalle, puis 18 000 dans le cas de plages dont les sorties enveloppaient bien les courbes expérimentales. Le modèle microscopique de RAG du Laboratoire Matériaux et Durabilités de Constructions (LMDC) permettant d'évaluer diverses grandeurs en conditions accélérées, nous nous sommes notamment intéressés au volume de gel créé, au gonflement induit du volume élémentaire représentatif (VER), à divers pourcentages du gonflement maximal (5, 25, 50, 75, 90, 95, et 100%), ainsi qu'au temps pour atteindre chaque pourcentage. Pour agréger l'analyse sur ces multiples sorties, nous avons ajouté une petite étape à la méthode de Morris qui consiste à calculer une fréquence cumulée des indices de sensibilité de chaque sortie et à la comparer à un seuil global. Les analyses de sensibilité en conditions accélérées (température à 38° C) nous ont permis de déterminer dix paramètres à conserver potentiellement, ainsi que les paramètres à thermoactiver (coefficient de diffusion et coefficient de fixation des alcalins) lorsqu'on doit tenir compte du changement de température (passage en conditions atmosphériques). Nous avons donc réitéré les mêmes analyses à 29°C, 10°C, et dans les conditions de températures variables de l'environnement du barrage de Song Loulou. En définitive, nous avons retenu neuf variables (Diamètre maximal des cailloux, concentration en granulat dans le béton, fraction de sable dans les granulats, concentration initiale d'alcalins dans la pâte de ciment, porosité du mortier, distance sur laquelle le gel peut migrer pour les sables, volume molaire du gel

crée, nombre de mole de Na réagissant avec 1 mole de Si pour former le gel, coefficient de fixation des alcalins), à prendre en compte dans le processus de construction du modèle de substitution que nous allons élaborer à l'échelle de l'éprouvette dans le chapitre suivant. Avant de donner une interprétation des résultats d'analyses de sensibilité d'un point de vue physique, il est important de préciser que cette étude porte sur le béton d'un barrage affecté par la RAG et âgé d'une trentaine d'année, contrairement aux bétons jeunes conservés en conditions de laboratoires usuellement étudiés. Cela suppose que la diffusion était déjà plus avancée que les réactions chimiques de formation de gel au début des essais accélérés LPC N°44. Cela peut modifier l'impact relatif de la diffusion et de la fixation des alcalins sur les sorties pendant ces essais. De plus, étant donné que l'énergie d'activation de diffusion est d'environ  $18 \text{ kJ.mol}^{-1}$  ( $4,30 \text{ kcal/mol}$ ) [Goto & Roy 1981], et celui de la réaction chimique est autour de  $78 \text{ kJ.mol}^{-1}$  [Bulteel *et al.* 2002, Kim *et al.* 2015], les mécanismes réactifs sont généralement plus accélérés par la température que la diffusion selon la loi d'Arrhenius. Ces raisons pourraient expliquer le fait que notre analyse de sensibilité, menée avec des données obtenues à  $38^\circ \text{C}$ , souligne une prédominance de "FIXNA" sur "DIFFG", sachant que "FIXNA" est le coefficient de proportionnalité entre la cinétique de consommation d'alcalins et la différence entre la concentration d'alcalins dans l'agrégat et le seuil d'alcalins à partir duquel il y a réaction. Ce résultat met en évidence le risque de considérer la seule diffusion ionique pour évaluer la cinétique ASR dans des structures réelles sans tenir compte des mécanismes réactifs. Il convient également d'indiquer que le diamètre maximal de la plus grande classe granulaire "DMAX (3)" est important car il implique un volume de matériau plus important pour une diffusion qui dure plus longtemps, c'est-à-dire des effets RAG plus longs. Enfin, il est naturel que la concentration initiale en alcalins "CNA0", ainsi que les paramètres de gel (volume molaire du gel crée "VMGEL", nombre de mole de Na réagissant avec 1 mole de Si pour former le gel "RNSc", Coefficient de fixation des alcalins "FIXNA") aient une importance sur la cinétique de la RAG.

## CHAPITRE III

### Construction du modèle de substitution d'un modèle microscopique



<b>III.2</b>	<b>REVUE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LES MODELES DE SUBSTITUTION .....</b>	<b>86</b>
III.2.1	METHODE DES SURFACES DE REPONSE QUADRATIQUES .....	87
III.2.2	METHODES DES SURFACES DE REPONSE PAR POLYNOMES DE CHAOS .....	89
III.2.3	ERREURS D'ESTIMATION .....	95
III.2.4	SYNTHESE .....	98
<b>III.3</b>	<b>CONSTRUCTION DU DCP POUR LA RAG EN CONDITIONS ATMOSPHERIQUES DE SONG LOULOU .....</b>	<b>98</b>
III.3.1	ALGORITHME DE CONSTRUCTION DU DCP ET DONNEES .....	98
III.3.2	RESULTATS OBTENUS ET PROBLEMES .....	100
<b>III.4</b>	<b>PROPOSITION D'UNE TECHNIQUE DE CONSTRUCTION DE MODELE DE SUBSTITUTION PAR DCP ET COMPOSITION DE FONCTION.....</b>	<b>102</b>
III.4.1	ALGORITHME DE CONSTRUCTION DE MODELE SUBSTITUTION PAR LA COMPOSITION DE FONCTION .....	102
III.4.2	ILLUSTRATION SUR DEUX EXEMPLES SIMPLES .....	103
<b>III.5</b>	<b>APPLICATION A LA CONSTRUCTION DU MODELE DE SUBSTITUTION DU GONFLEMENT VOLUMIQUE D'UN VER DU A LA RAG .....</b>	<b>107</b>
III.5.1	MODELE DE SUBSTITUTION EN CONDITIONS ATMOSPHERIQUES DE SONG LOULOU.....	107
III.5.2	MODELE DE SUBSTITUTION EN CONDITIONS ACCELEREES .....	111
<b>III.6</b>	<b>SYNTHESE .....</b>	<b>112</b>



### III.1 Introduction

En l'absence d'un modèle physique expliquant comment sont reliées les entrées d'un système aux sorties de celui-ci, il est possible de recourir à un méta-modèle visant à établir une relation mathématique entre entrées et sorties, sans fondement physique. Les modèles de régression, les réseaux de neurones artificiels, les surfaces de réponse et les chaos polynomiaux font partie de cette famille [Duprat *et al.* 2011]. De la même manière, il est possible de substituer à un modèle physique numériquement lourd un modèle de substitution plus aisé à manipuler, construit à partir d'un plan d'expériences numériques comprenant les entrées et les sorties du modèle physique.

Des analyses de sensibilités, effectuées au chapitre 2, ont permis de réduire le nombre de paramètres sur lesquels considérer l'aléa dans le modèle microscopique de RAG que nous avons retenu. Cela permet, dans ce chapitre, d'aborder la construction du modèle de substitution du gonflement volumique de RAG avec neuf variables aléatoires (dimension stochastique efficace), au lieu de la vingtaine initiale. Une revue bibliographique des méthodes de construction de modèle de substitution nous amènera à choisir le développement en chaos de polynômes comme méthode à implémenter. Les résultats obtenus par implémentation de cette méthode permettront d'observer un grand écart entre les réponses du modèle de substitution et celles du modèle microscopique [Multon *et al.* 2009]. Pour résoudre ce problème, nous allons proposer une approche nouvelle, pour une erreur inférieure à 2%, consistant à coupler le développement en chaos de polynômes à la composition de fonction. Après une illustration sur 2 exemples simples de l'algorithme de la méthode que nous proposons, son application à notre problème sera présentée. Le résultat est un modèle de substitution « hybride » basé sur l'expression mathématique d'une sigmoïde dont les trois paramètres sont des développements en chaos de polynômes de Legendre des 9 variables aléatoires du modèle microscopique.

### III.2 Revue bibliographique sur les modèles de substitution

Quelle que soit la méthode de construction d'un modèle de substitution (ou méta-modèle ou émulateur) de  $k$  variables aléatoires, le principe général de la démarche comprend deux étapes (Figure III.1) :

- 1- Détermination d'un échantillon de  $r$  Couples  $\left[ \text{Entrées } (X_1^l, \dots, X_k^l) / \text{Sorties } (\mathcal{M}(X_1^l, \dots, X_k^l)) \right]$  avec  $l$  allant de 1 à  $r$ , en des points précis suivant un plan d'expériences.
- 2- Approximation de  $\mathcal{M}$  (construction du modèle de substitution) sur ces échantillons.

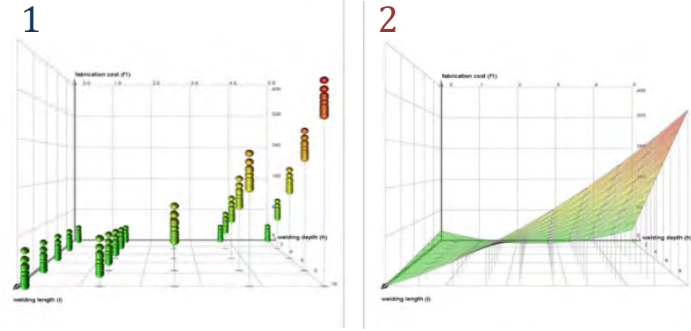


Figure III.1 : Points échantillons (1) et modèle de substitution (2)

On peut classer les méthodes proposées dans la littérature en deux grandes catégories : les méthodes d'évaluation de  $\mathcal{M}$  par classification après apprentissage et validation (Réseaux de neurones artificiels, Machines à Vecteurs Supports, ...), et les méthodes de construction artificielle d'une approximation polynomiale de  $\mathcal{M}$  (méthodes des surfaces de réponse quadratiques, méthodes des surfaces de réponse par polynômes de chaos, ...). La deuxième famille de méthodes a l'avantage de donner une expression du modèle de substitution quasi-explicite contrairement à la première.

Dans ce qui suit, on ne s'attardera que sur les méthodes de construction d'une approximation polynomiale, en s'appuyant entre autres sur les références [Berveiller 2005, Mohammadkhani Shali 2007a, Nguyen 2007, Blatman & Sudret 2010a, Riahi 2013, Fajraoui 2014].

### III.2.1 Méthode des surfaces de réponse quadratiques

La méthode des surfaces de réponse quadratiques est utilisée depuis le début des années cinquante dans plusieurs domaines scientifiques tels que la biologie animale et végétale, les sciences humaines, la chimie [Schoefs 1996]. Dans le cas général, on cherche à expliquer la réponse d'un système en établissant un lien entre les entrées et la sortie du système. Dans le cas de l'utilisation des surfaces de réponse en fiabilité structurale, on cherche à approximer la fonction d'état limite  $g(X)$ , qui caractérise la défaillance d'une structure, où le vecteur  $X = (X_1, \dots, X_k)$  comprend les variables intervenant dans le problème étudié [Nguyen *et al.* 2009]. Lorsqu'on a recours à des modèles aux éléments finis pour calculer tout ou partie de la fonction  $g(X)$ , cette dernière devient implicite et ne peut être évaluée que de manière discrète par des réalisations  $X^l = (X_1^l, \dots, X_k^l)$ ,  $l = 1, \dots, r$  des variables. L'idée d'origine de la méthode des surfaces de réponse est alors de remplacer la fonction  $g(X)$  par une fonction explicite équivalente  $\tilde{g}(X)$ . Il s'agit généralement d'une surface polynomiale, dont les coefficients sont déterminés de manière à minimiser l'erreur d'approximation, en particulier au voisinage du point de défaillance le plus probable (point de l'état limite admettant la plus forte densité de probabilité). Le choix du degré

de la surface polynomiale, ses caractéristiques et la conception du plan d'expériences sont profondément liés [Duprat *et al.* 2011]. Le nombre de coefficients à déterminer augmente (de même que la taille du plan d'expériences) avec le degré du polynôme. Habituellement, on utilise des surfaces polynomiales linéaires ou quadratiques pour lesquelles  $\tilde{g}(X)$  est de la forme :

$$\tilde{g}(X) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^k \alpha_i X_i + \sum_{i=1}^k \alpha_{ii} X_i^2 + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1, j \neq i}^k \alpha_{ij} X_i X_j \quad \text{Eqn III.1}$$

où  $\alpha = [\alpha_0, \alpha_i, \alpha_{ii}, \alpha_{ij}]^T$  est le vecteur des  $(k+1)(k+2)/2$  coefficients du polynôme calculés par la méthode des moindres carrés à partir du plan d'expériences numérique choisi  $\{X^{(l)}, l = 1, \dots, r\}$ , où  $r \geq \text{Dim}(\alpha)$ , soit :

$$\alpha = \arg \min_{\alpha} \sum_{i=1}^r \left( g(X^{(l)}) - \tilde{g}(X^{(l)}) \right)^2 \quad \text{Eqn III.2}$$

### III.2.1.1 Type de surfaces de réponse quadratiques

On peut regrouper les surfaces de réponses en trois types ci-après :

- Surface de réponse linéaire lorsque  $\tilde{g}(X) = a_0 + \sum_{i=1}^k a_i X_i$  ;
- Surface de réponse dite quadratique incomplète lorsque  $\tilde{g}(X) = a_0 + \sum_{i=1}^k a_i X_i + \sum_{i=1}^k a_{ii} X_i^2$  ;
- Surface de réponse dite quadratique complète  $\tilde{g}(X)$  prend l'expression [Eqn III.1](#).

La construction des surfaces de réponses peut se faire soit dans l'espace physique (dans lequel les variables prennent leurs valeurs réelles exactes respectives) ou dans l'espace standard (dans lequel les variables suivent des lois normales centrées réduites permettant de déterminer plus facilement des indices de fiabilité). Les coefficients sont évalués en résolvant un système d'équation à matrice symétrique dépendant du plan d'expériences utilisé. Dans le cas d'une surface de réponse quadratique complète, les coefficients sont déterminés par [Eqn III.2](#).

Il est possible de proposer une construction dynamique de la surface de réponse  $\tilde{g}(X)$  intégrée à une approche de type FORM (First Order Reliability Method), où la valeur et le signe de la fonction ainsi que la position des points du plan d'expériences dans l'espace standard permettent de définir une pondération sur ces points [Nguyen *et al.* 2009].

### III.2.1.2 Plans d'expériences

Parmi les plans d'expériences utilisés dans la construction des surfaces de réponses quadratiques, on peut citer entre autres [Myers 2013] :

- le plan d'expériences en étoile qui comprend  $2k + 1$  points ([Figure III.2a.](#)),
- le plan d'expériences en étoile modifié qui comprend  $2nk + 1$  points ([Figure III.2b.](#)),
- le plan d'expériences factoriel qui comprend  $2^k$  points et permet de prendre en compte les interactions entre variables ([Figure III.2c.](#)),

- le plan d'expériences composite centré (CC) qui est la réunion d'un plan en étoile et d'un plan factoriel ; il comprend  $2^k + 2k + k_c$  points et est l'un des plus performants du point de vue de la représentativité des données (Figure III.2d. et e.).

Le plan d'expériences utilisé peut être figé ou adaptatif (construction dynamique), construit tant dans l'espace physique que dans l'espace standard.

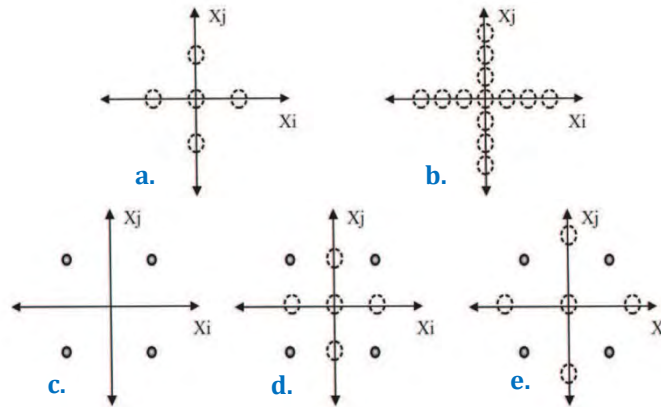


Figure III.2 : Plans d'expériences pour deux Variables Aléatoires

Le choix du type de plan d'expériences est lié à la présence ou non de termes croisés dans l'expression de la surface de réponse, à sa forme figée ou adaptative et à son algorithme de constitution. On peut trouver dans [Devictor 1996, Gayton 2002, Mohammadkhani Shali 2007b, Nguyen *et al.* 2007] des exemples d'algorithmes de constitution guidés par l'efficacité et l'économie d'appels au modèle réel. Lorsque le nombre de variables aléatoires dépasse la vingtaine, la méthode de surface de réponse quadratique perd de sa performance [Duprat *et al.* 2011]. Cette limite est levée dans le cas des surfaces de réponse par polynômes de chaos qui sont également plus utilisées dans la littérature.

### III.2.2 Méthodes des surfaces de réponse par polynômes de chaos

Ces méthodes s'appuient sur l'hypothèse générale que les variables standardisées sont indépendantes, ce qui n'est pas nécessairement le cas des variables physiques de certains problèmes d'ingénierie. La manière de traiter les cas de dépendance est abordée au § V.2.

#### III.2.2.1 Développement en chaos polynômial

Le Développement en Chaos Polynômial (DCP) est une méthode probabiliste qui consiste à développer une fonction de carré sommable sur une base de polynômes deux à deux orthogonaux (polynômes d'Hermite, de Legendre, etc.). Ce développement est basé sur la théorie du Chaos Homogène introduit par [Wiener 1938] et sur les travaux de [Cameron & Martin 1947]. L'utilisation du DCP dans la simulation numérique des processus stochastiques a été remise au goût du jour par [Ghanem & Kruger 1996, Ghanem 1999, Ghanem & Spanos 2012]. Le

Développement en Chaos Polynômial, appelé également développement de Wiener-Hermite, permet d'exprimer les variables aléatoires indépendantes sur une base de polynômes d'Hermite multivariés. La convergence de ce développement, démontrée par [Cameron & Martin 1947], est optimale lorsque les variables aléatoires suivent une loi normale centrée réduite. Cependant, si les variables aléatoires ont une densité non gaussienne, la convergence rapide du développement dans la base du chaos polynomial dépend des densités de probabilités des variables aléatoires standards définissant l'espace des probabilités [Xiu & Karniadakis 2003]. En effet, des correspondances optimales entre des familles de lois de probabilité et des familles de polynômes orthogonaux ont été établies par [Askey 1975, Askey & Wilson 1985] puis étendues par [Koekoek & Swarttouw 1996, Koekoek *et al.* 2010] pour couvrir les polynômes orthogonaux de base. Le **Tableau III.1** donne quelques correspondances entre les variables et les familles de polynômes univariés associés pour la construction du chaos polynomial [Xiu & Karniadakis 2003].

Tableau III.1 : Polynômes associés à chaque type de variable

	Distribution $\xi$	Polynômes $\Psi_\alpha(\xi)$	Support $\xi$
Variable aléatoire Continue	Gaussienne	Hermite	$[-\infty, +\infty]$
	Gamma	Laguerre	$[0, +\infty]$
	Beta	Jacobi	$[-1, 1]$
	Uniforme	Legendre	$[-1, 1]$
Variable aléatoire Discrète	Poisson	Charlier	$\{0, 1, 2, \dots\}$
	Binomiale	Krawtchouk	$\{0, 1, 2, \dots, n\}$
	Binomiale négative	Meixner	$\{0, 1, 2, \dots\}$
	Hypergéométrique	Hahn	$\{0, 1, 2, \dots, n\}$

Dans ce qui suit, nous considérons que les entrées du modèle étudié  $\xi$  sont des variables aléatoires indépendantes, centrées et réduites. Aussi, toute fonction  $\mathcal{M}(\xi) \in (L^2)$ , espace des fonctions de carré sommable, admet la décomposition suivante :

$$\mathcal{M}(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \Psi_j(\xi) \quad \text{Eqn III.3}$$

où  $\{a_j\}_{j=0}^{\infty}$  est l'ensemble des coefficients du DCP et  $\Psi_j(\xi)$  désigne un polynôme multivarié de degré  $j$ . En pratique, la série **Eqn III.3** est tronquée jusqu'au degré polynomial  $p$ . Le nombre total de termes dans le DCP est fonction du nombre  $k$  des variables et du degré  $p$ . Il est donné par :

$$P = \frac{(k+p)!}{k! p!} \quad \text{Eqn III.4}$$

L'équation **Eqn III.3** devient alors :

$$\mathcal{M}(\xi) = \sum_{j=0}^P a_j \Psi_j(\xi) + \varepsilon_P \quad \text{Eqn III.5}$$

Plusieurs approches ont été développées pour estimer les coefficients du DCP que l'on peut classer comme intrusives [Le Maître *et al.* 2002, Matthies & Keese 2005] ou non intrusives [Tatang *et al.* 1997, Huang *et al.* 2007, Blatman & Sudret 2008]. Une approche intrusive consiste à introduire le calcul des coefficients du DCP directement dans le modèle numérique. Ce qui a pour avantage de déterminer les coefficients en une seule exécution du modèle numérique. Cette approche est très délicate à mettre en œuvre et pose des difficultés pour les modèles fortement non linéaires [Berveiller 2005]. Par opposition, l'approche non intrusive ne nécessite pas de modifier le modèle numérique mais considère celui-ci comme une boîte noire. Les coefficients du DCP sont déterminés après avoir évalué le modèle numérique en différents points de l'espace des paramètres suivant un plan d'expériences. Pour ces raisons, une approche non intrusive sera utilisée dans ce travail de thèse. Ainsi les méthodes de détermination des coefficients de DCP de cette approche, notamment la méthode de projection et la méthode de régression, sont détaillées par la suite.

### III.2.2.2 Méthode de projection

Cette méthode consiste à projeter la réponse du modèle sur la base du chaos polynomial. La projection de l'équation Eqn III.5 sur  $\Psi_j(\xi)$  donne :

$$E[a\Psi_j] = E\left[\sum_{i=1}^p a_i \Psi_i \Psi_j\right] = \sum_{i=1}^p a_i E[\Psi_i \Psi_j] \quad \text{Eqn III.6}$$

Où  $E[\cdot] = \int_{\Omega^n} (\cdot) d\phi(\xi)$ .

En utilisant l'orthogonalité des polynômes du chaos ( $E[\Psi_i \Psi_j] = 0$  si  $i \neq j$ ), on obtient :

$$E[a\Psi_j] = a_j E[\Psi_j^2] \quad \text{Eqn III.7}$$

Le coefficient du DCP  $a_j$  s'obtient alors à l'aide de la formule suivante :

$$a_j = \frac{E[a(\xi)\Psi_j(\xi)]}{E[\Psi_j^2(\xi)]} \quad \text{Eqn III.8}$$

Dans cette expression, le dénominateur est connu d'une façon analytique alors que le numérateur nous ramène à un calcul d'intégrale :

$$E[a\Psi_j] = \int_{\Omega^n} a\Psi_j(\xi) d\phi(\xi) \quad \text{Eqn III.9}$$

Ce dernier peut être estimé par une méthode de type Monte-Carlo ou Quasi-Monte-Carlo. Cependant, pour une bonne précision, le nombre de points nécessaires est très important. Une alternative est d'employer une méthode de quadrature bien qu'elle puisse être délicate quand la dimension du problème est grande.

### III.2.2.3 Méthode de régression

Cette méthode permet de calculer les coefficients de la décomposition en chaos polynomial à l'aide d'une minimisation au sens des moindres carrés. Supposons que  $\mathcal{M}(\xi)$  s'écrive sous la forme suivante :

$$\mathcal{M}(\xi) = \mathcal{M}^{DCP}(\xi) + \varepsilon \quad \text{Eqn III.10}$$

avec  $\mathcal{M}^{DCP}(\xi) = \sum_{j=0}^p a_j \Psi_j(\xi)$  et  $\varepsilon$  l'erreur de moyenne nulle.

Supposons toujours que l'on dispose d'un échantillon  $Y = \{y^i, i = 1, \dots, r\}$  de la réponse du modèle  $\mathcal{M}(\xi)$  pour un plan d'expériences de taille  $r$  ( $r$  réalisations du vecteur  $\xi = \{\xi^i, i = 1, \dots, r\}$ ). Dans la démarche de la méthode de régression, on cherche à minimiser, au sens des moindres carrés, l'écart quadratique moyen  $E[\varepsilon]$ . Cela consiste à résoudre l'équation suivante :

$$E[\varepsilon] = \arg \min \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \left( \mathcal{M}(\xi^i) - \sum_{j=0}^p a_j \Psi_j(\xi^i) \right)^2 \quad \text{Eqn III.11}$$

où  $\arg \min$  est une fonction qui renvoie les valeurs de  $a_j$  pour lesquelles la fonction en question est minimale. En notant  $\Psi$  la matrice définie par  $\Psi = \{\Psi_{ij} = \Psi_j(\xi^i), i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, P\}$ , et  $a = [a_0, \dots, a_p]^t$ , la solution de l'équation Eqn III.11 s'écrit comme suit :

$$a = (\Psi^T \Psi)^{-1} \Psi^T Y \quad \text{Eqn III.12}$$

Dans ce contexte, la matrice  $\Psi^T \Psi$  est appelée matrice de Fisher. L'équation Eqn III.12 est généralement résolue à l'aide d'une méthode numérique robuste telle que la décomposition en valeurs singulières [Sudret 2008]. Cette méthode est fortement dépendante du choix du plan d'expériences. Un plan d'expériences inadéquat peut conduire à une matrice de Fisher singulière ou mal conditionnée et donc non inversible. Le plan d'expériences peut être construit en utilisant les techniques d'échantillonnage à savoir Monte Carlo, Latin Hypercube, pseudo Monte Carlo. Il peut également être défini à partir des racines de Gauss [Isukapalli 1999], [Berveiller 2005].

### III.2.2.4 Développement en chaos polynomial creux et adaptatif

Cette méthode sera appliquée dans la construction des modèles de substitution des déplacements de la pile au chapitre 5. Cette sous-section s'appuie sur les travaux de [Blatman & Sudret 2008, Blatman 2009a, Blatman & Sudret 2010b, a, 2011]. Reprenons le DCP de la réponse du modèle :

$$Y = \mathcal{M}^{DCP}(\xi) = \sum_{\alpha \in A} a_\alpha \Psi_\alpha(\xi) \quad \text{Eqn III.13}$$

$A$  est appelé ensemble de troncature pour la base de polynômes et est défini comme suit :

$$A = \left\{ \alpha \in \mathbb{N}^k : \|\alpha\|_1 \equiv \sum_{i=1}^k \alpha_i \leq p \right\} \quad \text{Eqn III.14}$$



où  $\text{card}(A) = (k + p)! / (k! p!)$ , nombre de coefficients du DCP, augmente fortement avec le nombre  $k$  des variables et l'ordre  $p$  du DCP (fléau de la dimension). C'est ce qui justifie la proposition des stratégies de troncature détaillées par la suite.

*i. Stratégie de troncature du chaos polynomial*

Selon le principe de hiérarchie des effets, les modèles dépendent principalement des effets principaux et des interactions d'ordre faible. [Blatman & Sudret 2010a] ont développé une stratégie en accord avec ce principe qui permet de réduire le nombre des coefficients dans le polynôme en gardant seulement ceux qui ont une contribution significative à la réponse du modèle. Considérons ainsi des ensembles de troncatures à partir de normes  $q$ ,  $0 < q \leq 1$  :

$$A = \left\{ \alpha \in \mathbb{N}^k : \|\alpha\|_q \equiv \left( \sum_{i=1}^k \alpha_i^q \right)^{1/q} \leq p \right\} \quad \text{Eqn III.15}$$

Pour  $q = 1$ , on obtient le schéma de troncature usuel présenté dans la section précédente. Plus  $q$  est faible, plus les interactions d'ordre élevé seront pénalisées. Dans ce cas, on parle d'un schéma isotrope de troncature.

Il est également possible d'utiliser un schéma de troncature anisotrope qui introduit les indices de sensibilité afin de réduire davantage le coût de calcul puisque toutes les variables d'entrée du modèle n'ont pas le même impact sur la réponse. Dans ce cas, le schéma de troncature favorise les variables d'entrée qui correspondent aux indices de sensibilités totaux  $S^T$  les plus importants.

On définit alors l'ensemble des poids :

$$w_i = \frac{\sum_{j=1}^k S_j^T + \max_{1 \leq l \leq k} S_l^T - S_i^T}{\sum_{j=1}^n S_j^T}, \quad i = 1, \dots, k \quad \text{Eqn III.16}$$

La stratégie de troncature du chaos polynomial sera alors effectuée sur la base des ensembles de troncatures suivantes :

$$A_{q,w} = \left\{ \alpha \in \mathbb{N}^k : \|\alpha\|_q \equiv \left( \sum_{i=1}^k |w_i \alpha_i|^q \right)^{1/q} \leq p \right\} \quad \text{Eqn III.17}$$

*ii. Chaos polynomial creux adaptatif*

L'idée ici est de construire un polynôme de chaos creux adaptatif en tenant compte de l'erreur d'approximation. Il s'agit dans un premier temps de se donner un plan d'expérience initial  $X$  basé sur des suites de nombres quasi-aléatoire, et de stocker les évaluations correspondantes du modèle dans  $Y$ . Ensuite, on construit un DCP d'ordre 0, c'est-à-dire  $A = \{0\}$  et on calcule les coefficients  $(R^2, Q^2)$ , voir III.2.3. Puis, on ajoute des termes candidats à la base  $A$ , de norme  $q$  croissante, c'est-à-dire pour chaque  $p = 1, \dots, p_{\max}$  et  $j = 1, \dots, j_{\max}$ , on distingue alors 2 étapes :

- Une étape ascendante : on ajoute les termes candidats à la base courante un par un et on calcule à chaque fois le coefficient  $R^2$ . On retient les termes qui conduisent à une augmentation significative de  $R^2$  (c'est-à-dire :  $R^2 > \varepsilon_1$ ).

- Une étape descendante : on enlève finalement tous les termes qui conduisent à une diminution insignifiante de  $R^2$  (c'est-à-dire :  $R^2 < \varepsilon_2$ ).

Les seuils  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  sont des paramètres de l'algorithme.

Au cours des itérations, la matrice de Fisher peut devenir mal conditionnée puisque le nombre de termes retenus s'approche au fur et à mesure de la taille  $r$  du plan d'expériences. Pour remédier à ce problème, [Blatman & Sudret 2010a] enrichissent systématiquement le plan d'expériences de sorte à satisfaire la règle heuristique  $r > 2P$ . Des techniques d'échantillonnage séquentiel, basées sur l'échantillonnage quasi-aléatoire ou l'échantillonnage Latin Hypercube, sont alors utilisées. Finalement, l'algorithme s'arrête dès que  $Q^2 \geq Q_{cible}^2$ .

Si la stratégie de troncature adoptée est anisotrope, alors on initialise les poids comme suit :  $w = \{1, \dots, 1\}$ , on calcule au cours des itérations les indices de sensibilité et on actualise les poids. Dans ce cas, l'enrichissement de la base se fait selon la norme  $(q, w)$  croissante. La procédure est schématisée sur la Figure III.3.

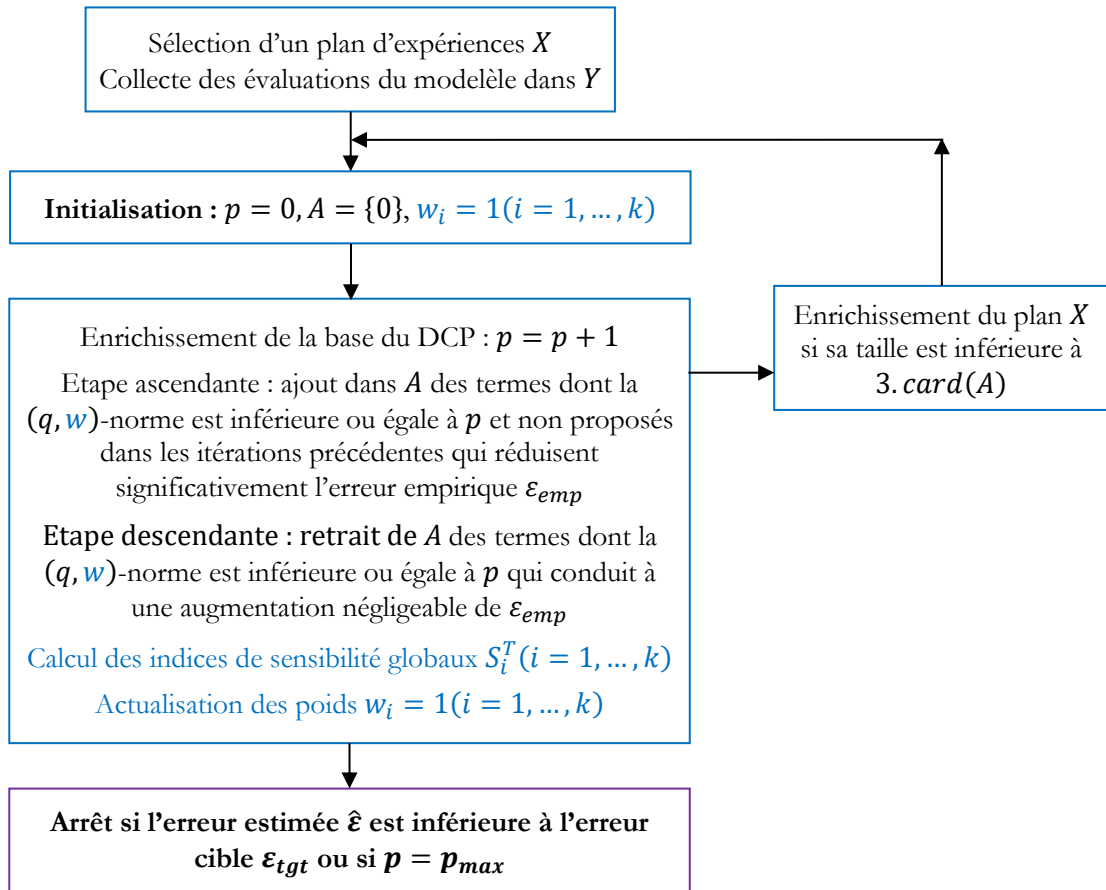


Figure III.3 : Procédure itérative pour construire un DCP creux traduit de [Blatman 2009a]

Une autre stratégie a été développée pour construire des DCP creux. Cette méthode est basée sur la technique de sélection des variables, appelée Least Angle Régression (LAR) [Efron et al. 2004]. La méthode LAR fournit une suite de solutions (dans ce cas, des polynômes de chaos

creux) de moins en moins creux qui reproduit au mieux la réponse du modèle. Pour sélectionner la meilleure solution, un critère basé sur la méthode de validation croisée est souvent utilisé. Ce schéma de validation est relativement coûteux en temps de calcul puisqu'il requiert plusieurs appels de la procédure LAR. Pour surmonter cette difficulté, une autre alternative dite méthode de validation croisée a été proposée par [Blatman & Sudret 2011], et qui ne nécessite qu'un seul appel de la procédure LAR. L'algorithme du DCP creux est schématisé dans la Figure III.4.

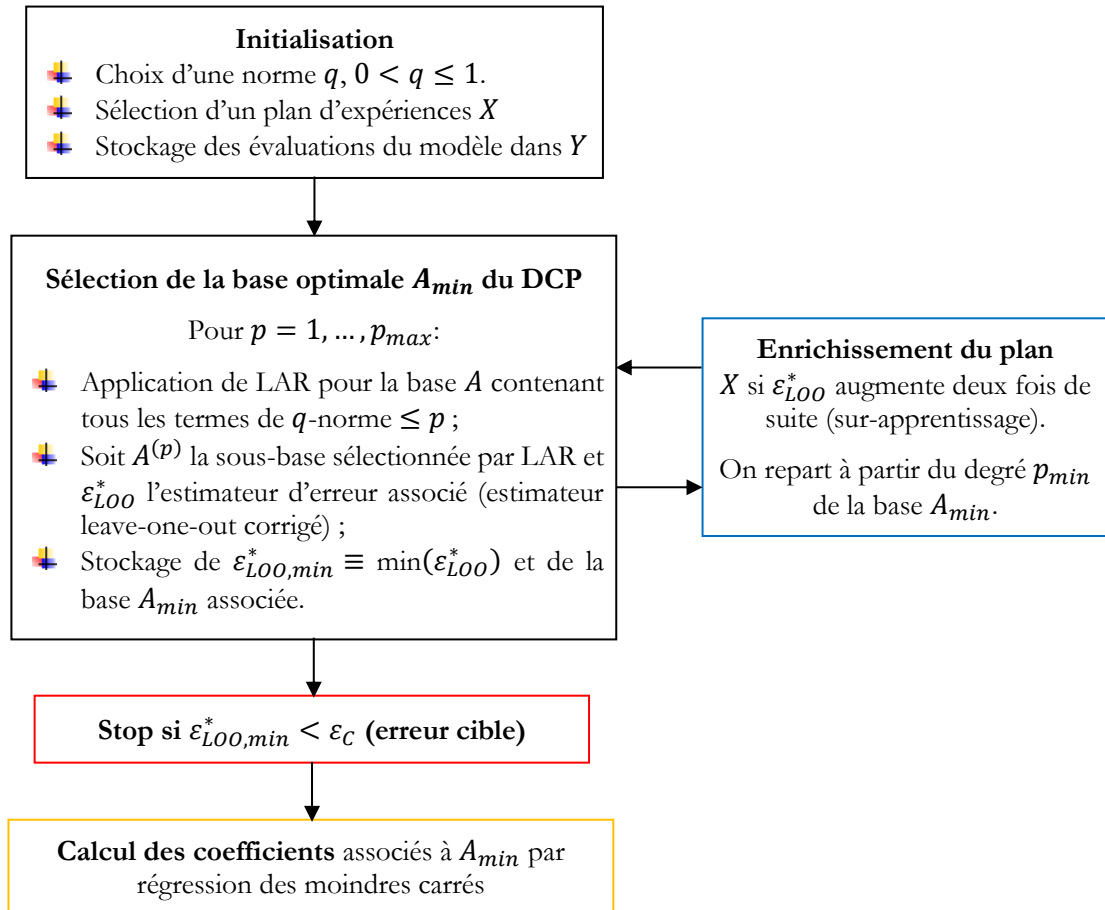


Figure III.4 : Procédure LAR pour construire un DCP creux traduit de [Blatman 2009a]

### III.2.3 Erreurs d'estimation

Trois types d'erreurs d'estimation sont présentés à partir des travaux de [Stone 1974, Devictor 1996, Molinaro *et al.* 2005, Blatman 2009b]. Pour chaque type d'erreur, nous avons représenté le plan d'expérience dont on dispose initialement (marqués avec des U), puis sa répartition en points d'apprentissage (marqués par des A) et points de validation (marqués par des V) utilisés dans le calcul de l'erreur. Les figures ont été représentées pour un cas où on aurait  $k = 2$  variables aléatoires (chaque U représenté dans un hexagone est un point à deux coordonnées) pour construire un développement en chaos polynomial d'ordre  $p = 2$ , la taille du plan d'expérience considéré est  $r = 12 = 2P = 2 \frac{(2+2)!}{2!2!}$ , et le nombre de coefficient du DCP  $P = 6$ .

### III.2.3.1 Coefficients $R^2$ et $R_{aj}^2$ correspondant à l'erreur empirique simple et ajustée

L'erreur d'approximation du DCP peut être quantifiée par le coefficient de détermination  $R^2$ . Ce coefficient dépend de la somme des carrés des écarts entre la "vraie" réponse du modèle et le DCP :

$$R^2 = 1 - \frac{\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r (\mathcal{M}(u^i) - \mathcal{M}^{DCP}(u^i))^2}{V(Y)} = 1 - \varepsilon_{emp} \quad \text{Eqn III.18}$$

où la variance est  $V(Y) = \frac{1}{r-1} \sum_{i=1}^r (y^{(i)} - E[Y])^2$  avec  $E[Y] = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r y^{(i)}$  et  $y^{(i)} = \mathcal{M}(u^i)$

Ainsi,  $R^2 = 1$  indique un ajustement parfait entre le modèle physique et le DCP, alors que  $R^2 = 0$  correspond à une très mauvaise approximation. Cependant l'utilisation de  $R^2$  peut être trompeuse car ce coefficient tend systématiquement vers 1, si  $r$  tend vers  $P$ . En effet, si  $r = P$ ,  $R^2 = 1$  puisque le DCP interpole les réalisations du modèle. Il s'agit du sur-apprentissage. Comme alternative, il est possible d'utiliser le coefficient de détermination ajusté  $R_{aj}^2$  défini par :

$$R_{aj}^2 = 1 - \frac{r-1}{r-P-1} (1 - R^2) = 1 - \varepsilon_{emp}^* \quad \text{Eqn III.19}$$

La figure ci-dessous illustre notre exemple en donnant les expressions de  $R^2$  et  $R_{aj}^2$  correspondantes.

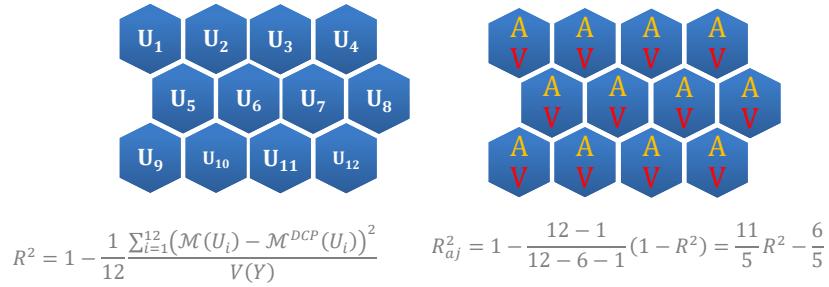


Figure III.5 : Exemple d'illustration de la détermination des coefficients  $R^2$  et  $R_{aj}^2$

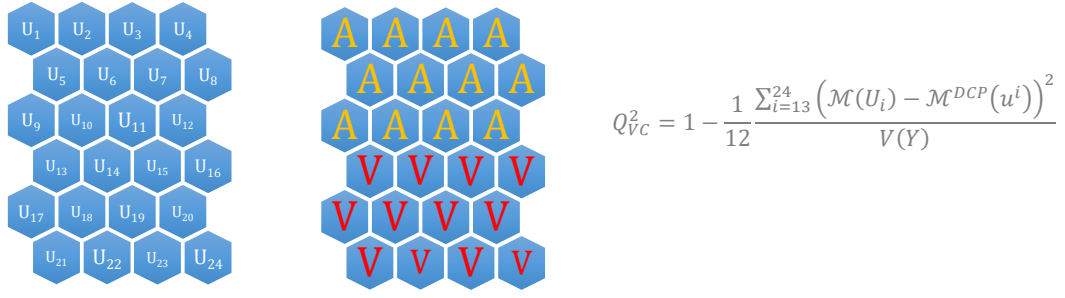
D'après [Blatman & Sudret 2010a], le coefficient surestime  $R_{aj}^2$  encore l'erreur d'approximation. Les coefficients permettent d'être plus précis.

### III.2.3.2 Coefficient $Q_{vc}^2$ correspondant à l'erreur de validation croisée explicite

Ici, le plan d'expériences est divisé en 2 sous-ensembles. Le DCP est construit à partir du premier sous-ensemble de taille  $r$ , appelé ensemble d'apprentissage. La performance de l'approximation est évaluée en calculant la somme des carrés des écarts entre la "vraie" réponse du modèle et le DCP sur le deuxième sous-ensemble de taille  $M$ , appelé ensemble de validation. Le coefficient  $Q_{vc}^2$  est alors défini comme suit :

$$Q_{vc}^2 = 1 - \frac{\frac{1}{M} \sum_{i=r+1}^{(M+r)} (\mathcal{M}(u^i) - \mathcal{M}^{DCP}(u^i))^2}{V(Y)} \quad \text{Eqn III.20}$$

La figure ci-après illustre notre exemple (avec  $M = 12$ ) en donnant l'expression de  $Q_{vc}^2$ .


 Figure III.6 : Exemple d'illustration de la détermination du coefficient  $Q_{VC}^2$ 

Bien que  $Q_{VC}^2$  soit plus précis, il nécessite un plan d'expériences de plus grande taille, raison pour laquelle il est rarement utilisé dans la construction de DCP. On lui préfère les coefficients associés à l'erreur de validation croisée par « Leave-One Out » qui sont précis bien que calculés à partir d'un plan d'expérience de taille  $r$ .

### III.2.3.3 Coefficients $Q_{Loo}^2$ et $Q_{LooA}^2$ correspondant à l'erreur de validation croisée par Leave-One Out simple et ajustée

La détermination des coefficients  $Q_{Loo}^2$  et  $Q_{LooA}^2$  consiste, après avoir exclu tour à tour (de 1 à  $N$ ) un point du plan d'expériences avant la construction du DCP, à calculer l'écart  $\Delta_{Looi}$  entre la valeur prédite par le DCP et la valeur réelle au point exclu.

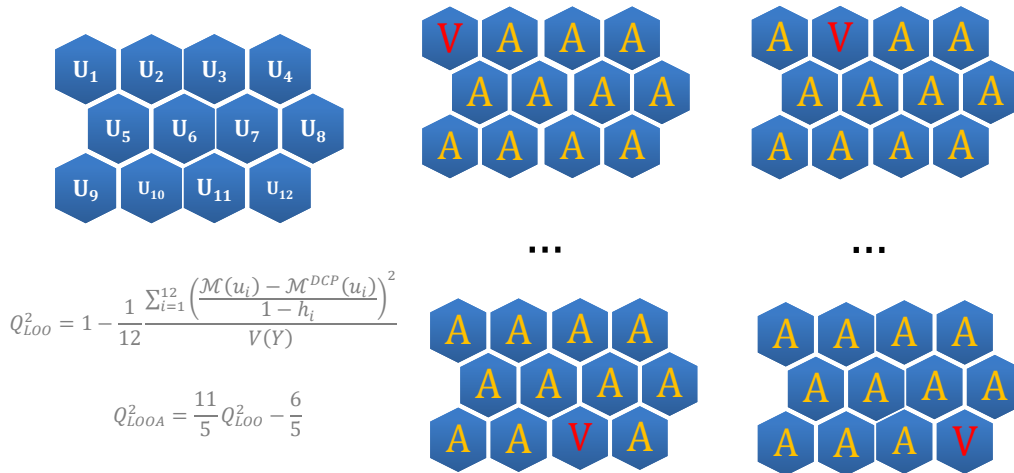
$$\Delta_{Looi} = \frac{\mathcal{M}(u_i) - \mathcal{M}^{DCP}(u_i)}{1 - h_i} \quad \text{Eqn III.21}$$

Où :  $h_i$  est le  $i^{\text{ème}}$  terme diagonal de la matrice  $\Psi(\Psi^T \Psi)^{-1} \Psi^T$

$$Q_{Loo}^2 = 1 - \frac{1}{r} \frac{\sum_{i=1}^N \Delta_{Looi}^2}{V(Y)} = 1 - \varepsilon_{Loo} \quad \text{Eqn III.22}$$

Comme dans le cas de  $R^2$ , ce coefficient peut être ajusté à l'aide du même facteur correcteur :

$$Q_{LooA}^2 = 1 - \frac{r-1}{r-P-1} (1 - Q_{Loo}^2) = 1 - \varepsilon_{Loo}^* \quad \text{Eqn III.23}$$


 Figure III.7 : Exemple d'illustration de la détermination des coefficients  $Q_{Loo}^2$  et  $Q_{LooA}^2$

### III.2.4 Synthèse

Les méthodes de construction d'un modèle de substitution proposées dans la littérature peuvent être classées en deux grandes catégories : les méthodes d'évaluation du modèle  $\mathcal{M}$  par classification après apprentissage et validation (Réseaux de Neurones Artificiels, Machines à Vecteurs Supports, etc.), et les méthodes de construction artificielle d'une approximation polynomiale de  $\mathcal{M}$  (Méthodes des Surfaces de Réponse quadratiques, Méthodes des Surfaces de Réponse par polynômes de chaos, etc.). Elles nécessitent toutes un échantillon de  $r$  Couples  $\left[ \text{Entrées } (X_1^l, \dots, X_k^l) / \text{Sorties } (\mathcal{M}(X_1^l, \dots, X_k^l)) \right]$  avec  $l$  allant de 1 à  $r$ , en des points précis suivant un plan d'expériences (première étape de toute méthode de méta-modélisation). Le nombre  $r$  de points nécessaires est *a priori* plus grand pour les méthodes de la première catégorie que celles de la seconde, qui sont aussi les plus utilisées. Nous n'avons donc choisi de ne détailler dans ce paragraphe que les Méthodes de Surfaces de Réponses. Les méthodes des surfaces de réponse quadratiques peuvent avoir une mauvaise performance à plus de 20 variables aléatoires. Ce handicap est levé dans le cas des surfaces de réponse par polynômes de chaos qui sont également plus utilisés dans la littérature. Ainsi, nous les utiliserons de manière préférentielle comme méthode de méta-modélisation dans la section suivante. Nous avons également présenté des coefficients, associés aux erreurs d'estimation, qui permettent d'évaluer la qualité d'un modèle de substitution. Ils seront évalués chaque fois qu'un modèle de substitution sera construit dans la suite du travail.

### III.3 Construction du DCP pour la RAG en conditions atmosphériques de Song Loulou

Dans cette section, l'algorithme de construction d'un développement en chaos de polynômes (DCP), les données et les résultats obtenus dans le cas d'un modèle de substitution du gonflement volumique dû à la RAG en conditions atmosphériques de Song Loulou seront présentés.

#### III.3.1 Algorithme de construction du DCP et données

L'algorithme présenté ci-dessous a été élaboré en se basant sur les éléments bibliographiques de la section III.2.2. Il utilise les équations rappelées ci-après.

Transformation isoprobabiliste de l'espace physique vers l'espace uniforme centré réduit pour l'utilisation des polynômes de Legendre :

$$\xi_i = \frac{2X_i - X_i^{\max} - X_i^{\min}}{X_i^{\max} - X_i^{\min}} \leftrightarrow X_i = \frac{(X_i^{\max} - X_i^{\min})\xi_i + X_i^{\max} + X_i^{\min}}{2} \quad \text{Eqn III.24}$$

Matrice des polynômes multivariés :

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & \Psi_1^1 & \dots & \Psi_{p-1}^1 \\ 1 & \Psi_1^2 & \dots & \Psi_{p-1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \Psi_1^r & \dots & \Psi_{p-1}^r \end{bmatrix} \quad \text{Eqn III.25}$$

Coefficients du DCP :

$$[a_0, a_1, \dots, a_{p-1}]^T = (Z^T \cdot Z)^{-1} \cdot Z^T \cdot Y \quad \text{Eqn III.26}$$

Expression du DCP :

$$\mathcal{M}^{DCP}(t, \xi_1, \dots, \xi_k) = a_0 + a_1 \cdot \Psi_1 + \dots + a_{p-1} \cdot \Psi_{p-1} \quad \text{Eqn III.27}$$

L'algorithme de construction du DCP qui a été implémenté est donné dans le tableau ci-après.

Tableau III.2 : Algorithme de construction du Développement en Chaos Polynomial plein

<p><b>Entrées :</b> <math>k</math>, le nombre de variables d'entrées auxquelles s'ajoute le temps; <math>p</math> le degré maximal des polynômes du développement en chaos polynomial ; <math>P = \frac{(k+p)!}{k! p!}</math>, le nombre de coefficients du DCP ; <math>r</math> (<math>r \geq P</math>), le nombre de trajectoires ; <math>r_0 \leq r</math>, le nombre de trajectoires initialement traitées ; <math>X_i^{min}</math> et <math>X_i^{max}</math>, les valeurs minimales et maximales respectives des variables <math>X_i</math> avec <math>i = 1, \dots, k</math> ; <math>MX_{r \times k}</math>, la matrice des <math>r</math> tirages sur les <math>k</math> variables ; <math>MY_r</math>, le vecteur des <math>r</math> réponses du plan d'expériences, <math>Q^2</math> seuil, la valeur minimale du coefficient de qualité du DCP.</p> <p><b>Sortie :</b> <math>\mathcal{M}^{DCP}(\xi_1, \dots, \xi_k)</math> et <math>Q^2</math></p>
<p><b>Début</b></p> <p>1-Lire les <math>j = 1, \dots, r_0</math> (<math>k + 1</math>)-uplets de <math>X_i, Y_j = \mathcal{M}(X_i) = \mathcal{M}(\xi_i)</math>, <math>j^{ième}</math> ligne de <math>MX_{r \times k}</math> et de <math>MY_r</math></p> <p>2-Calculer les <math>\xi_i, \Psi(\xi_i)</math> et <math>Z</math></p> <p>Calculer les coefficients <math>a_0, a_1, \dots, a_{p-1}</math></p> <p>Construire le DCP, <math>\mathcal{M}^{DCP}(\xi_1, \dots, \xi_k)</math></p> <p>Estimer l'erreur <math>Q^2</math></p> <p><b>Si</b> (<math>Q^2 &lt; Q^2</math> seuil ou <math>r_0 &lt; r</math>)</p> <p>Incrémenter <math>r_0</math> et revenir à l'étape 1</p> <p><b>Sinon</b></p> <p>Enregistrer <math>\mathcal{M}^{DCP}(\xi_1, \dots, \xi_k)</math> et <math>Q^2</math></p> <p><b>Fin Si</b></p> <p><b>Retour</b></p> <p><b>Fin</b></p>

Il est important de souligner que l'algorithme ci-dessus suppose la présence initiale d'une base de données contenant les tirages  $MX_{r \times k}$  du plan d'expériences ainsi que leurs réponses respectives  $MY_r$ .

Pour la construction de notre DCP, nous considérons les 9 variables retenus de l'analyse de sensibilité dont les nouveaux indices sont indiqués en gras : le diamètre maximal de la plus grande classe granulaire (DMAX(3) =  $X_4 \equiv \mathbf{X}_1$ ), la concentration volumique de granulat par m<sup>3</sup> de béton (CONGRA =  $X_5 \equiv \mathbf{X}_2$ ), la fraction de la plus petite classe granulaire dans les granulats (FRAGRA(1) =  $X_6 \equiv \mathbf{X}_3$ ), la concentration initiale d'alcalin dans la pâte de ciment (CNA0 =  $X_8 \equiv \mathbf{X}_4$ ),



la porosité du mortier (POROMO =  $X_{11} \equiv X_5$ ), la distance sur laquelle le gel peut migrer dans le sable (COLC(1) =  $X_{14} \equiv X_6$ ), le volume molaire du gel crée (VMGEL =  $X_{18} \equiv X_7$ ), le nombre de mole de sodium réagissant avec 1 mole de silice pour former le gel (RNSc =  $X_{19} \equiv X_8$ ), et le coefficient de fixation des alcalins (FIXNA =  $X_{20} \equiv X_9$ ). Des tirages aléatoires ont été effectués sur ces variables suivant des lois uniformes sur les plages finales indiquées dans le [Tableau II.2](#). Pour chacun des 10 000 9-uplets obtenus, une cinétique de RAG avec 1450 échéances couvrant une période totale de 100 ans est calculée à l'aide du modèle [Multon *et al.* 2009]. Les 10 000 cinétiques obtenues constituent la base de données avec laquelle nous allons travailler tout au long de ce chapitre.

### III.3.2 Résultats obtenus et problèmes

Pour l'implémentation de l'algorithme de construction du DCP, présenté dans le [Tableau III.2](#), nous avons procédé par tirage aléatoire d'un point par cinétique (voir figure ci-après) pour constituer une base de données de 10 000 points  $(X_{1,...,9}^j, t, \varepsilon_v) \equiv (\xi_{1,...,9}^j, t, \varepsilon_v)$ .

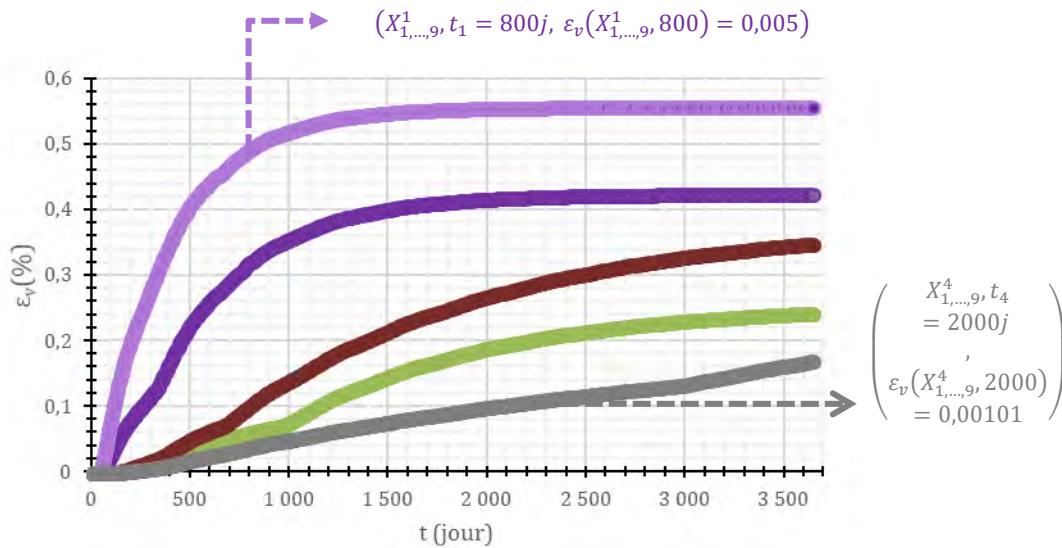


Figure III.8 : Illustration de la procédure de constitution de la base de données de construction du DCP

Le format de cette base de données est présenté dans le tableau ci-après.

Tableau III.3 : Format des données utilisées pour la construction des DCP de  $\varepsilon_v$

$j$	$\xi_1$ DMAX(3)	$\xi_2$ CONGRA	$\xi_3$ FRAGRA(1)	$\xi_4$ CNAO	$\xi_5$ POROMO	$\xi_6$ COLC(1)	$\xi_7$ VMGEL	$\xi_8$ RNSc	$\xi_9$ FIXNA	$\xi_{10}$ $t$	$\varepsilon_v$
1	0,851	-0,917	-0,628	-0,242	-0,078	-0,248	-0,420	0,961	-0,190	-0,950	1,99E-03
2	0,705	0,818	0,578	-0,041	0,078	-0,455	0,275	-0,037	0,459	-0,242	2,79E-03
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
9999	-0,910	0,356	0,231	0,686	0,922	-0,451	-0,049	0,191	0,423	0,588	3,13E-03
10000	-0,053	0,266	-0,541	0,079	0,900	-0,408	-0,951	-0,495	0,541	0,101	2,19E-03

L'algorithme du [Tableau III.2](#) a été implémenté en java sous Eclipse avec  $k = 10$ , (9 variables de RAG plus le temps),  $r = 10000$ . Nous avons construit des DCP de polynômes de Legendre d'ordre 2 ( $P = \frac{(10+2)!}{10! 2!} = 66$ ), et 3 ( $P = \frac{(10+3)!}{10! 3!} = 286$ ),  $Q_{VC-seuil}^2 = 0,99$ .

Comme on peut le constater sur la figure ci-après, les réponses des DCP obtenus sont assez éloignées de celle du modèle.

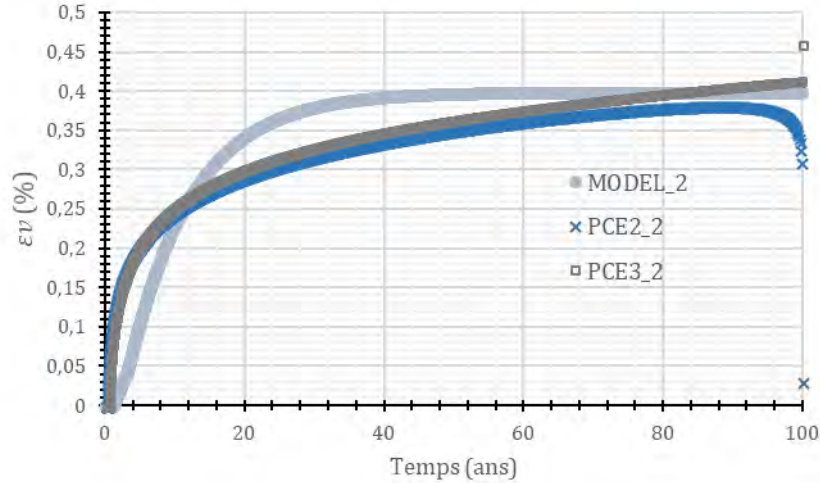


Figure III.9 : Résultat type obtenu pour des DCP de Legendre d'ordre 2 (PCE2) et 3 (PCE3)

Les coefficients de qualité du tableau ci-après, corroborent la remarque précédente en affichant des valeurs assez éloignées de  $Q_{VC-seuil}^2$ . De plus, ces coefficients sont surestimés étant donné qu'ils ne prennent en compte que certains points des cinétiques de RAG selon la procédure de construction du plan d'expériences que nous avons présentée sur la [Figure III.8](#) et le [Tableau III.3](#).

Tableau III.4 : Coefficients de qualité obtenus pour des DCP de Legendre d'ordre 2 (PCE2) et 3 (PCE3)

$p = 2, k = 10, P = 66$						$p = 3, k = 10, P = 286$					
$r_0$	$R^2$	$R_{aj}^2$	$Q_{VC}^2$	$Q_{Loo}^2$	$Q_{LooA}^2$	$r_0$	$R^2$	$R_{aj}^2$	$Q_{VC}^2$	$Q_{Loo}^2$	$Q_{LooA}^2$
200	0,933	0,900	0,887	0,816	0,725	900	0,915	0,876	0,846	0,797	0,702
250	0,912	0,881	0,843	0,808	0,739	1500	0,896	0,872	0,874	0,839	0,801
500	0,883	0,865	0,793	0,836	0,811	2500	0,897	0,884	0,874	0,866	0,848

Compte tenu des constats qui précèdent, la réflexion sur la manière de procéder pour obtenir un modèle de substitution de bonne qualité, nous a amené à élaborer une technique nouvelle. Sa présentation sous forme d'algorithme ainsi que son illustration sur 2 exemples simples feront l'objet de la prochaine section.

### III.4 Proposition d'une technique de construction de modèle de substitution par DCP et composition de fonction

Cette technique consiste principalement à déplacer la construction de DCP sur les paramètres d'une fonction de forme préalablement définie à partir de l'allure des cinétiques pour lesquelles on veut un modèle de substitution.

#### III.4.1 Algorithme de construction de modèle substitution par la composition de fonction

Il est donné dans le tableau ci-après.

Tableau III.5 : Algorithme de construction d'un modèle de substitution temporel par la composition de fonction et le DCP

<p><b>Entrées:</b> <math>k</math>, le nombre de variables d'entrées ; <math>p</math> le degré maximal des polynômes des développement en chaos polynomial ; <math>r \left( r \geq \frac{(k+m)!}{k! m!} \right)</math>, le nombre de trajectoires ; <math>l</math>, le nombre de division du temps ; <math>Vt</math>, le vecteur de taille <math>l</math> des valeurs du temps ; <math>X_i^{min}</math> et <math>X_i^{max}</math>, les valeurs minimales et maximales respectives des variables <math>X_i</math> avec <math>i = 1, \dots, k</math> ; <math>MX_{r \times k}</math>, la matrice des <math>r</math> tirages sur les <math>k</math> variables ; <math>MY_{r \times l}</math>, la matrice des <math>r \times l</math> réponses temporelles.</p> <p><b>Sortie :</b> <math>\mathcal{M}^{CFDCP}(t, \xi_1, \dots, \xi_k)</math>, modèle de substitution.</p>
<p><b>Début</b></p> <p><b>Identifier la famille de fonction (fonction de forme) des réponses temporelles</b> <math>MY_{r \times l}</math> ainsi que son <b>expression paramétrique</b>. Ceci peut se faire à partir de la forme de quelques-unes de ces réponses.                  Soit <math>m</math> le nombre de paramètres de cette expression, pour chaque trajectoire <math>j = 1, 2, \dots, r</math>, déterminer les valeurs des <math>m</math> paramètres qui ajustent le mieux la courbe des points <math>MY_{j \times l}</math> ; la matrice résultante est la matrice des paramètres <math>MP_{r \times m}</math>.                  En utilisant chacune des <math>m</math> colonnes de la matrice <math>MP_{r \times m}</math>,  <b>Construire le développement en chaos de chacun des paramètres</b> <math>b_h</math> correspondant (Eqn III.28) suivant l'algorithme du Tableau III.2.                  Enregistrer <math>\mathcal{M}^{CFDCP}(t, \xi_1, \dots, \xi_k)</math>.</p> <p><b>Retour</b></p> <p><b>Fin</b></p>

Paramètres de la fonction de forme des cinétiques :

$$b_h = a_0^h + a_1^h \psi_1 + \dots + a_{p-1}^h \psi_{p-1}, h = 1, \dots, m \quad \text{Eqn III.28}$$

Forme générale du modèle de substitution temporel :

$$\mathcal{M}^{CFDCP}(t, \xi_1, \dots, \xi_k) = \text{fonction}(t, b_1(\xi_1, \dots, \xi_k), \dots, b_m(\xi_1, \dots, \xi_k)) \quad \text{Eqn III.29}$$

Il est important d'insister sur le fait que la construction des  $m$  DCP de chacun des paramètres  $b_h$ ,  $h = 1, \dots, m$  se fait avec la même base de données que constitue la matrice des paramètres  $MP_{r \times m}$ . La sous-section suivante illustre cette nouvelle technique de construction de modèle de substitution en deux exemples simples, pour mieux la comprendre.

### III.4.2 Illustration sur deux exemples simples de fonctions de forme

#### III.4.2.1 Exemple d'une famille de fonctions de forme en racines carrées

Les données de cet exemple sont les suivantes :

$$k = 2, \xi_1 \in [-1,1]; \xi_2 \in [-1,1]; p = 1, l = 3, m = 2; r \geq \frac{(2+1)!}{2!1!} = 3 = P$$

Ainsi, les valeurs dont on dispose sont données dans les tableaux de la figure ci-après.

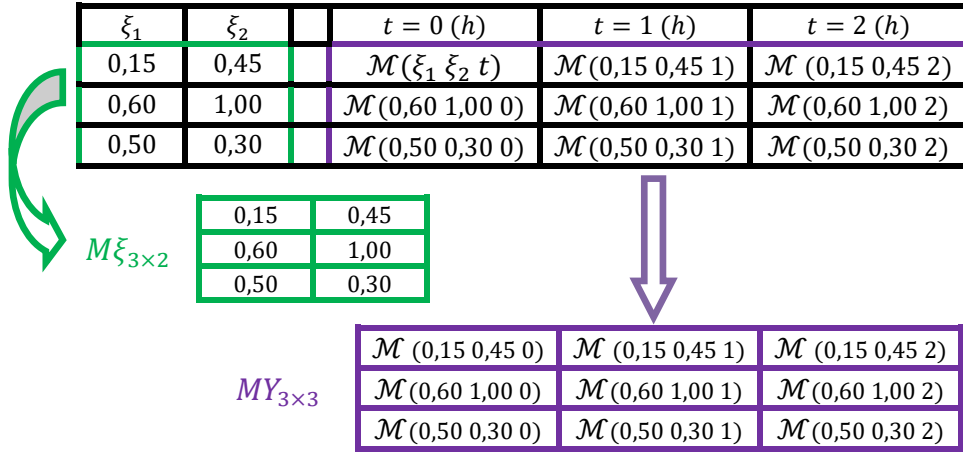


Figure III.10 : Forme des données de l'exemple de fonctions racines carrées

La figure ci-après illustre les points de la matrice  $MY_{3 \times 3}$ .

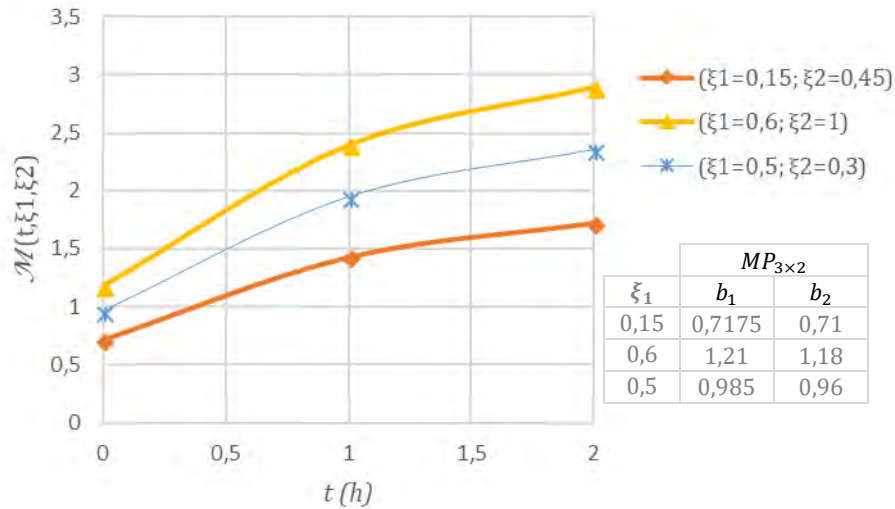


Figure III.11 : Courbes des points de  $MY_{3 \times 3}$  et matrice  $MP_{3 \times 2}$  - exemple de fonctions racines carrées

L'allure des courbes de la figure ci-dessus permet de déduire qu'il s'agit d'une famille de fonctions racines carrées dont l'expression paramétrique est donnée :

$$\mathcal{M}^{CFDCP}(t, b_1, b_2) = \mathcal{M}^{CFDCP}(t, \xi_1, \xi_2) = b_1(\xi_1, \xi_2)\sqrt{t} + b_2(\xi_1, \xi_2)$$

Les valeurs des paramètres  $b_1$  et  $b_2$  de chaque courbe, données dans le tableau de la figure précédente, sont obtenues par ajustement non-linéaire de Levenberg-Marquardt [Marquardt 1963, Lourakis 2005]. Une fois ces valeurs classées par ordre croissant, leur représentation (figure ci-dessous) permet de justifier qu'un DCP d'ordre 1, dont les expressions sont données ci-dessous, suffise à modéliser  $b_1$  et  $b_2$ .

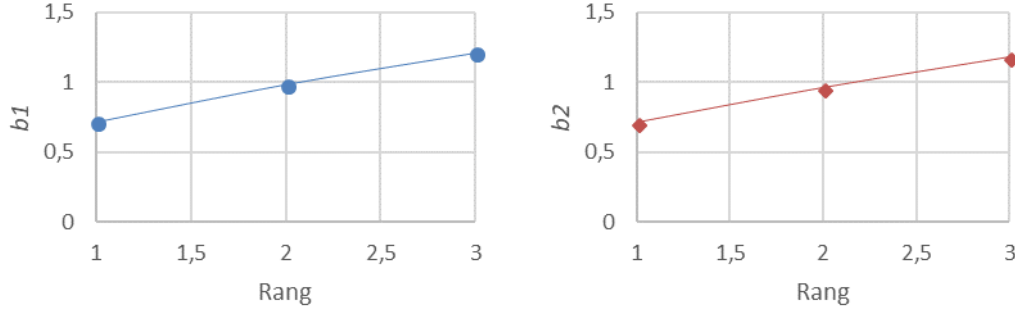


Figure III.12 : Distribution croissante des paramètres  $b_1$  et  $b_2$

$$b_1(\xi_1, \xi_2) = a_0^1 + a_1^1 \xi_1 + a_2^1 \xi_2$$

$$b_2(\xi_1, \xi_2) = a_0^2 + a_1^2 \xi_1 + a_2^2 \xi_2$$

Après application de l'algorithme de construction du DCP du [Tableau III.2](#), on obtient les coefficients du DCP du Tableau ci-dessous.

Tableau III.6 : Coefficients des DCP de  $b_1$  et  $b_2$  pour l'exemple de fonctions racines carrées

$i$	$a_i^1$	$a_i^2$	$\Psi_i^{Legendre}$
0	0,5	0,5	1
1	0,85	0,8	$\xi_1$
2	0,2	0,2	$\xi_2$

Les expressions explicites de  $b_1$ ,  $b_2$  et  $\mathcal{M}^{CFDCP}$ , sont données ci-après :

$$b_1(\xi_1, \xi_2) = 0,5 + 0,85\xi_1 + 0,2\xi_2$$

$$b_2(\xi_1, \xi_2) = 0,5 + 0,8\xi_1 + 0,2\xi_2$$

$$\mathcal{M}^{CFDCP}(t, b_1, b_2) = \mathcal{M}^{CFDCP}(t, \xi_1, \xi_2) = (0,5 + 0,85\xi_1 + 0,2\xi_2)\sqrt{t} + 0,5 + 0,8\xi_1 + 0,2\xi_2$$

#### III.4.2.2 Exemple d'une famille de fonctions de forme paraboliques

Les données de cet exemple sont les suivantes :

$$k = 2, \xi_1 \in [-1,1]; \xi_2 \in [-1,1]; p = 2, l = 3, m = 2; r \geq \frac{(2+2)!}{2!2!} = 6 = P$$

Ainsi, les valeurs dont on dispose sont données dans les tableaux de la figure ci-après.

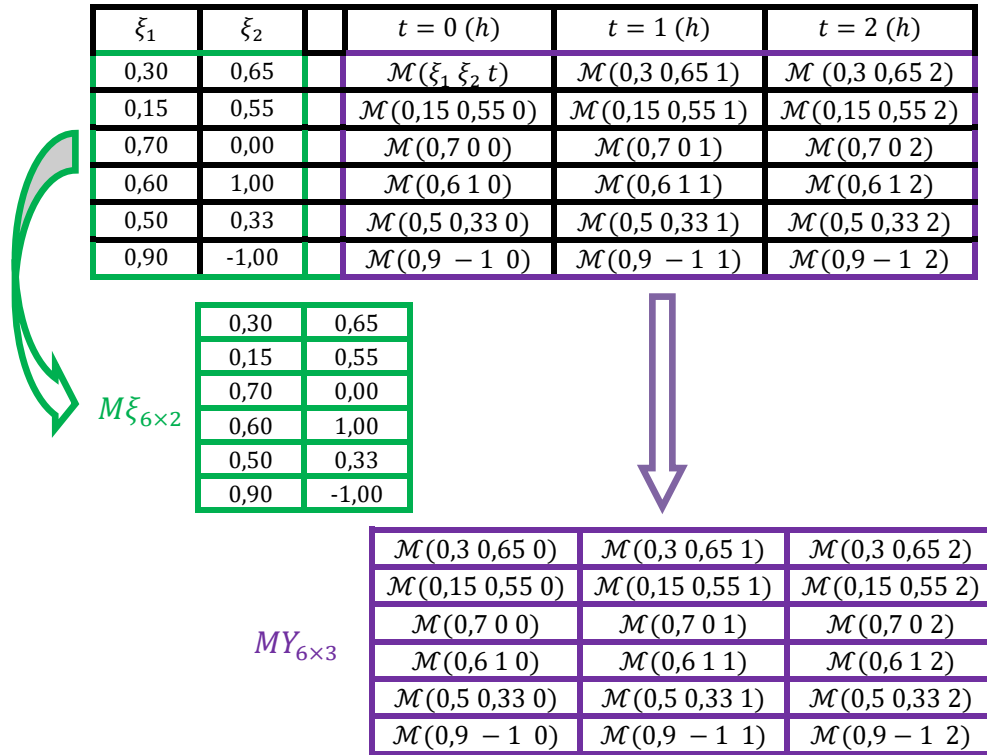


Figure III.13 : Forme des données de l'exemple de fonctions paraboliques

La figure ci-après illustre les points de la matrice  $MY_{6 \times 3}$

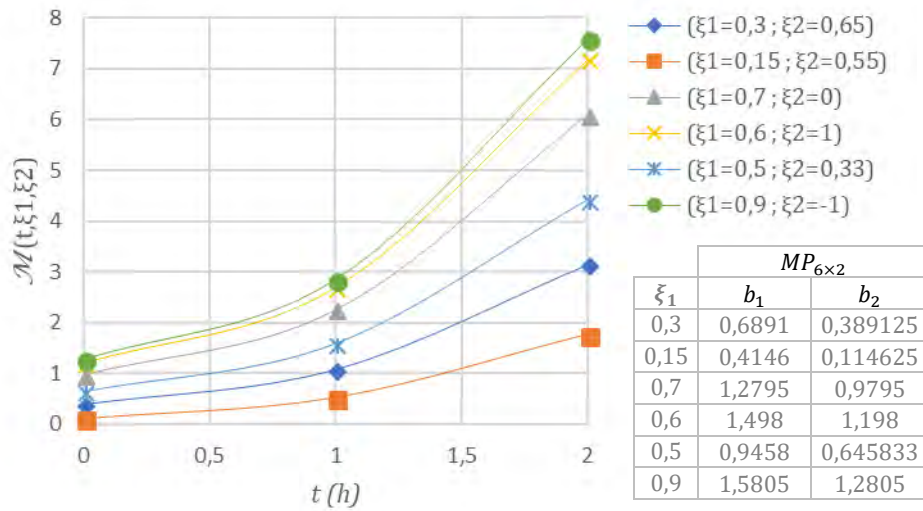


Figure III.14 : Courbes des points de  $MY_{6 \times 3}$  et matrice  $MP_{6 \times 2}$  - exemple de fonctions paraboliques

On en déduit qu'il s'agit d'une famille de fonctions paraboliques dont l'expression paramétrique est la suivante :

$$\mathcal{M}^{CFDCP}(t, b_1, b_2) = \mathcal{M}^{CFDCP}(t, \xi_1, \xi_2) = b_1(\xi_1, \xi_2)t^2 + b_2(\xi_1, \xi_2)$$

Les valeurs des paramètres  $b_1$  et  $b_2$  de chaque courbe, données dans le tableau de la figure précédente, sont obtenues par ajustement non-linéaire de Levenberg-Marquardt [Marquardt 1963, Lourakis 2005]. Une fois ces valeurs classées par ordre croissant, leur représentation (figure ci-dessous) permet de justifier qu'un DCP d'ordre 2, dont les expressions sont données ci-dessous, suffise à modéliser  $b_1$  et  $b_2$ .

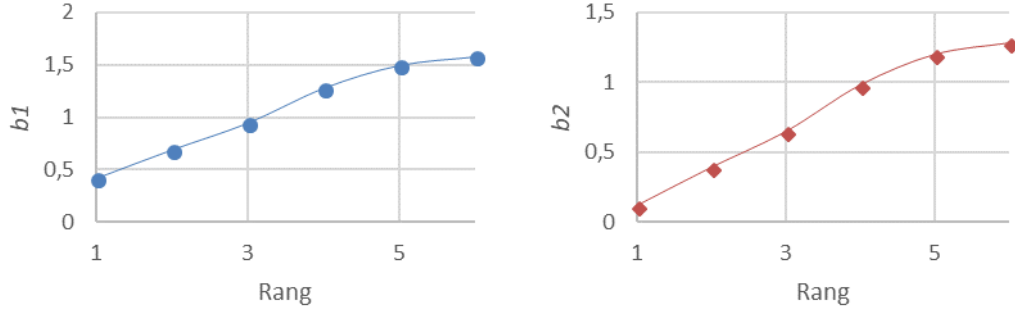


Figure III.15 : Distribution croissante des paramètres  $b_1$  et  $b_2$

$$b_1(\xi_1, \xi_2) = a_0^1 + a_1^1 \xi_1 + a_2^1 \xi_2 + a_3^1 \xi_1 \xi_2 + a_4^1 (0,5(3\xi_1^2 - 1)) + a_5^1 (0,5(3\xi_2^2 - 1))$$

$$b_2(\xi_1, \xi_2) = a_0^2 + a_1^2 \xi_1 + a_2^2 \xi_2 + a_3^2 \xi_1 \xi_2 + a_4^2 (0,5(3\xi_1^2 - 1)) + a_5^2 (0,5(3\xi_2^2 - 1))$$

Après application de l'algorithme de construction du DCP du [Tableau III.2](#), on obtient les coefficients du DCP du Tableau ci-dessous.

Tableau III.7 : Coefficients des DCP de  $b_1$  et  $b_2$  pour l'exemple de fonctions paraboliques

$i$	$a_i^1$	$a_i^2$	$\Psi_i^{Legendre}$
0	0,5	0,2	1
1	0,95	0,95	$\xi_1$
2	0,15	0,15	$\xi_2$
3	0,25	0,25	$\xi_1 \xi_2$
4	0,7	0,7	$0,5(3\xi_1^2 - 1)$
5	0,1	0,1	$0,5(3\xi_2^2 - 1)$

Les expressions explicites de  $b_1$ ,  $b_2$  et  $\mathcal{M}^{CFDCP}$ , sont données ci-après :

$$b_1(\xi_1, \xi_2) = 0,5 + 0,95\xi_1 + 0,15\xi_2 + 0,25\xi_1\xi_2 + 0,7(0,5(3\xi_1^2 - 1)) + 0,1(0,5(3\xi_2^2 - 1))$$

$$b_2(\xi_1, \xi_2) = 0,2 + 0,95\xi_1 + 0,15\xi_2 + 0,25\xi_1\xi_2 + 0,7(0,5(3\xi_1^2 - 1)) + 0,1(0,5(3\xi_2^2 - 1))$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{CFDCP}(t, \xi_1, \xi_2) = & (0,5 + 0,95\xi_1 + 0,15\xi_2 + 0,25\xi_1\xi_2 + 0,7(0,5(3\xi_1^2 - 1)) + 0,1(0,5(3\xi_2^2 - 1)))t^2 \\ & + (0,2 + 0,95\xi_1 + 0,15\xi_2 + 0,25\xi_1\xi_2 + 0,7(0,5(3\xi_1^2 - 1)) + 0,1(0,5(3\xi_2^2 - 1))) \end{aligned}$$



### III.5 Application à la construction du modèle de substitution du gonflement volumique d'un VER dû à la RAG

A la suite des deux exemples simples précédents, une application est faite à la construction de 2 modèles de substitution du gonflement volumique d'un VER dû à la RAG en conditions atmosphériques et accélérées respectivement.

#### III.5.1 Modèle de substitution en conditions atmosphériques de Song Loulou

Le modèle de substitution construit dans cette section permet de déterminer le gonflement volumique d'un VER dû à la RAG en conditions atmosphériques de Song Loulou (Température variable de la Figure II.22). Il sera utilisé dans le chapitre 5 pour l'application sur une pile d'évacuateur de crues de Song Loulou.

Les données utilisées sont celles indiquées à la fin de la section III.3.1. Les informations relatives à l'application de l'algorithme du Tableau III.5 sont :  $k = 9$ ,  $\xi_{1...9} \in [-1,1]$  ; nous disposons de 10 000 cinétiques  $r = 10000$  ; chacune d'elle a 1450 échéances ( $l = 1450$ ).

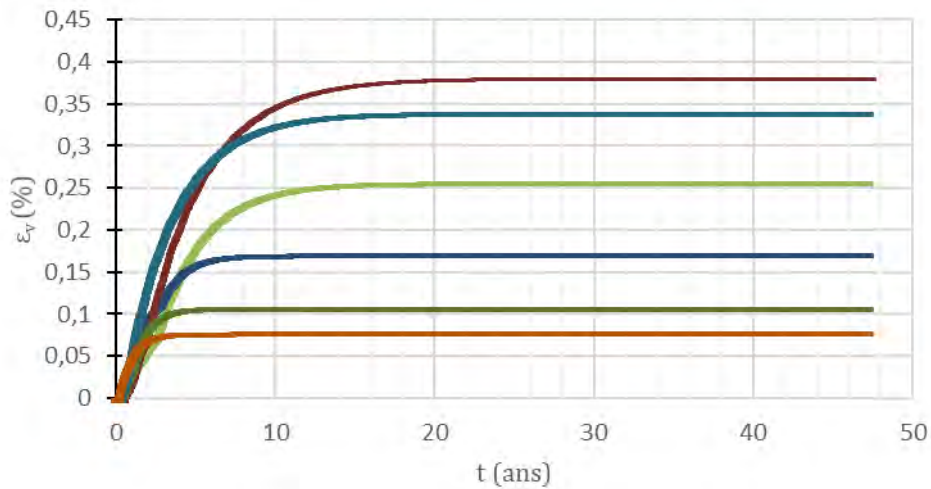


Figure III.16 : Extrait de cinétiques obtenues avec le modèle [Multon *et al.* 2009]

La figure ci-dessus permet d'observer que les cinétiques obtenues avec le modèle [Multon *et al.* 2009] sont des sigmoïdes dont la fonction paramétrique à 3 paramètres ( $m = 3$ ) est donnée ci-dessous.

$$\varepsilon_v(t) = \frac{1 - e^{-\frac{t}{\tau_C}}}{1 + e^{-\frac{t - \tau_L}{\tau_C}}} \varepsilon_{vMax} \quad \text{Eqn III.30}$$

Le choix de cette fonction est justifié par le fait qu'il s'agit de celle proposée par [Larive 1997], et très utilisée dans les modèles macroscopiques de RAG (voir I.4.1). Cependant, à travers la construction de DCP sur les paramètres  $\varepsilon_{vMax}$ ,  $\tau_C$ ,  $\tau_L$ , les paramètres physico-chimiques qui

contrôlent la RAG, et qui sont pris en compte dans le modèle microscopique, vont pouvoir être mis à contribution dans le modèle de substitution de manière quasi-explicite.

Pour un meilleur ajustement, la détermination de la matrice  $MP_{10000 \times 3}$  des trois paramètres de chacune des 10000 cinétiques de la base de données s'est faite de trois manières différentes pour les 2 paramètres  $\tau_C$  et  $\tau_L$  ;  $\varepsilon_{vMax}$  étant la dernière valeur de chaque cinétique. *Primo*, nous avons considéré que le point d'inflexion de la sigmoïde est toujours fixé à 45% du gonflement maximal (valeur comprise entre 35 et 65% conduisant au meilleur fittage de la sigmoïde) ;  $\tau_L$  est alors le temps correspondant à ce point et  $\tau_C$  peut en être déduit (approche 1). La sous-figure a ci-dessous donne la valeur du paramètre  $\varepsilon_{vMax}$  pour chacune des 10 000 cinétiques correspondant aux tirages aléatoires. Ces points sont ensuite rangés par ordre croissant, ce qui donne une certaine forme de répartition de chaque paramètre (courbes b pour  $\varepsilon_{vMax}$ , c pour  $\tau_C$  et e pour  $\tau_L$ ).

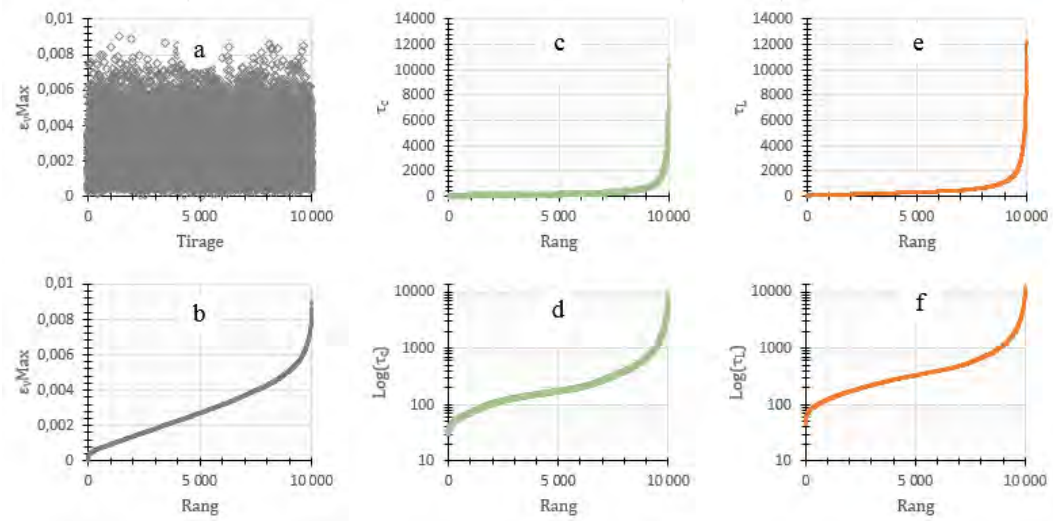


Figure III.17 : Répartition des trois paramètres  $\varepsilon_{vMax}$ ,  $\tau_L$ ,  $\tau_C$  avec point d'inflexion à 45% de  $\varepsilon_{vMax}$

Les courbes d et f de la figure ci-dessus présentent l'effet de lissage de l'application du logarithme à  $\tau_C$  et  $\tau_L$  qui sera abordé plus tard. *Secundo*, la méthode d'ajustement non-linéaire de Levenberg-Marquardt a été implémentée pour les paramètres  $\tau_C$  et  $\tau_L$  telle que détaillée en Annexe C (approche 2). La figure ci-dessous présente les résultats ainsi obtenus. On observe sur la courbe c des valeurs négatives et une plus forte non-linéarité de  $\tau_L$  par rapport à l'approche 1.

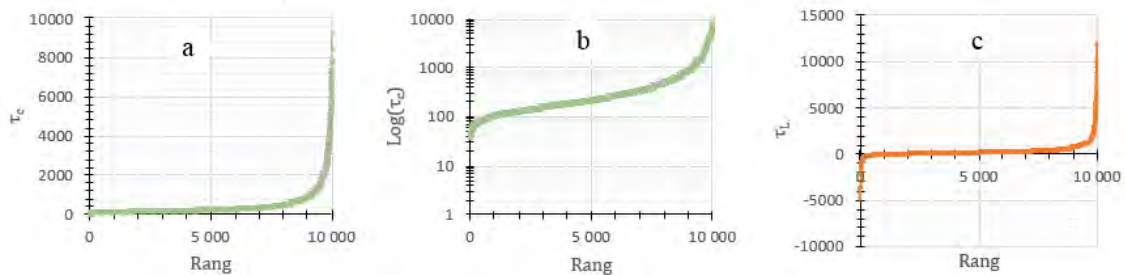


Figure III.18 : Répartition des 3 paramètres  $\varepsilon_{vMax}$ ,  $\tau_L$ ,  $\tau_C$  – Levenberg-Marquardt

*Tertio*, partant du fait que le début des cinétiques présente une non-linéarité plus forte et que ce n'est pas la partie la plus utile pour une application au calcul de structure, nous avons éliminé les 75 premiers points des 1450 points de chaque cinétique sur lesquels l'ajustement non-linéaire de Levenberg-Marquardt a été appliqué (approche 3). Les résultats, présentés sur la figure ci-après, contiennent également des valeurs négatives et une plus forte non-linéarité de  $\tau_L$  par rapport aux deux approches précédentes.

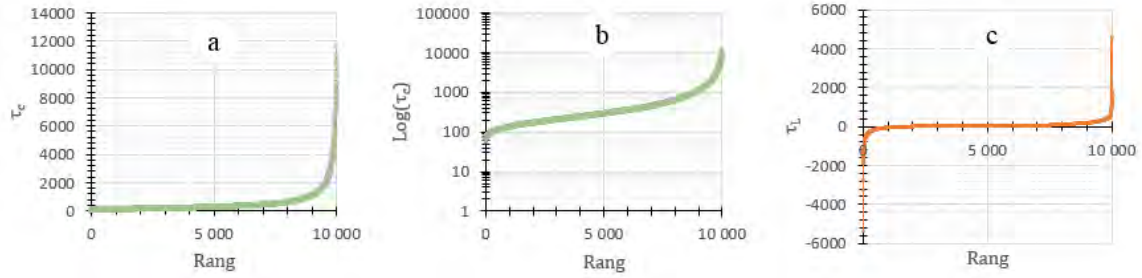


Figure III.19 : Répartition des 3 paramètres  $\varepsilon_{vMax}$ ,  $\tau_L$ ,  $\tau_c$  - Levenberg-Marquardt t-5%

La figure ci-dessous met en exergue l'effet de ces trois approches sur l'ajustement non-linéaire.

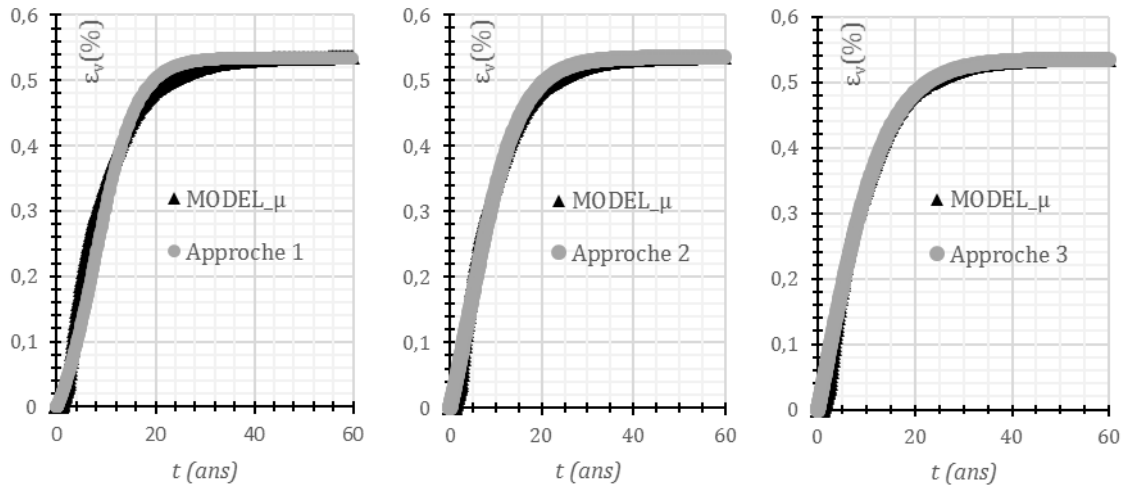


Figure III.20 : Sigmoïdes ajustées par 3 approches sur une courbe type donnée par le modèle de RAG

Comme on peut le voir, l'ajustement est de plus en plus précis au fil des approches de détermination des paramètres de la sigmoïde. Ce constat est appuyé par la comparaison des 2 figures ci-après qui présentent les moyennes et écarts-type de l'erreur absolue des sigmoïdes ajustées sur 10000 cinétiques en conditions atmosphériques en chacun des 1450 points par cinétiques déterminés par les expressions :

$$\Delta \varepsilon_{vi}(t) = \varepsilon_{vi}^M(t) - \varepsilon_{vi}^{CFDCP}(t), \quad \mu[|\Delta \varepsilon_v(t)|] = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r |\Delta \varepsilon_{vi}(t)|,$$

$$\sigma[|\Delta \varepsilon_v(t)|] = \sqrt{\frac{1}{(r-1)} \times \sum_{i=1}^r (\Delta \varepsilon_{vi}(t) - \mu[|\Delta \varepsilon_v(t)|])^2}$$

Eqn III.31

où  $\varepsilon_{vi}^{\mathcal{M}}(t)$  est le gonflement obtenu par le modèle microscopique et  $\varepsilon_{vi}^{CFDCP}$ , celui obtenu par la sigmoïde au tirage  $i$  des  $r = 10000$  tirages. Les gonflements sont en pourcentage.

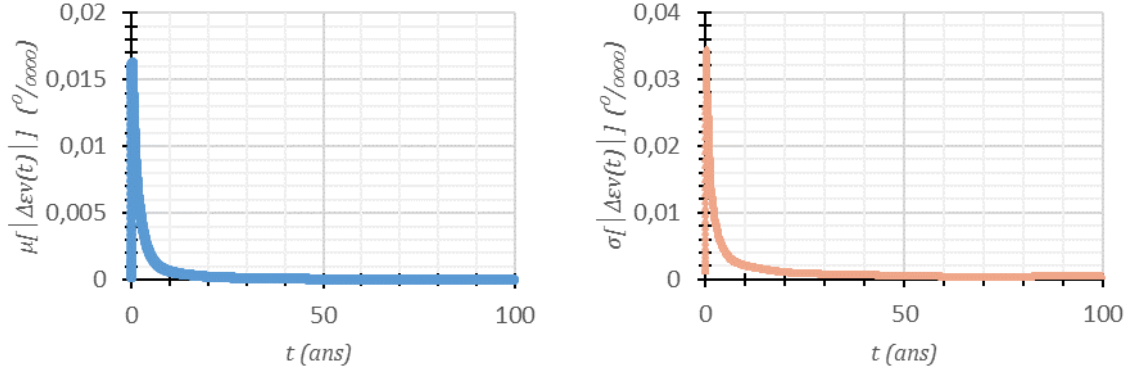


Figure III.21 : Moyennes et écarts-type de l'erreur absolue des sigmoïdes ajustées sur 10000 cinétiques en conditions atmosphériques avec exclusion des 75 premières échéances

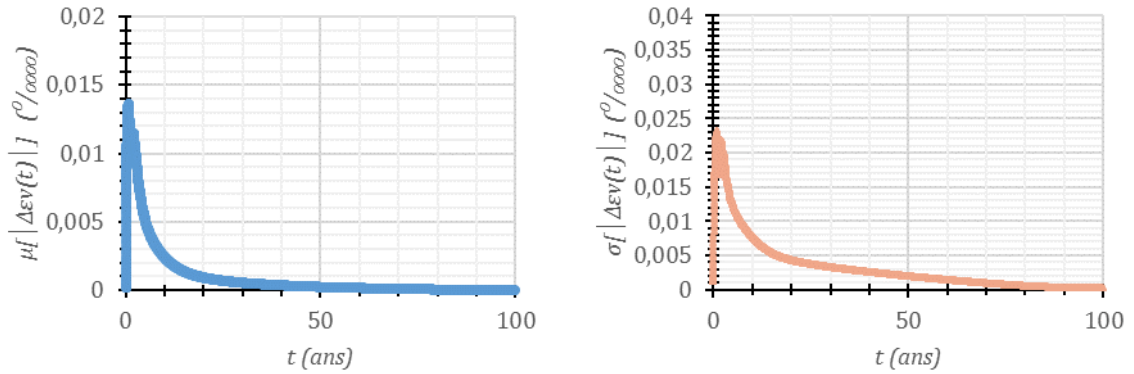


Figure III.22 : Moyennes et écarts-type de l'erreur absolue du modèle de substitution sur 10000 cinétiques en conditions atmosphériques

Cependant, les figures montrent que plus l'approche est précise, moins lisse est la courbe de  $\tau_L$ , qui n'arrive plus à être approché par un DCP d'ordre 3 dès la deuxième approche (voir coefficients de qualité correspondant dans le [Tableau III.8](#)).

L'utilisation de la fonction Log sur  $\tau_C$  et  $\tau_L$  permet de lisser davantage leur distribution dans le cas de l'approche 1 consistant à toujours considérer le point d'inflexion de la sigmoïde à 45% du gonflement maximal. En déployant la suite de l'algorithme du [Tableau III.5](#), on obtient les DCP dont les expressions sont données ci-dessous et les valeurs des coefficients en Annexe C.

$$\begin{cases} \varepsilon_{vMax}(\xi) = a_0^{\varepsilon_{vMax}} + \sum_{i=1}^{219} a_i^{\varepsilon_{vMax}} \cdot \psi_{L_i}(\xi) \\ \tau_C(\xi) = e^{(a_0^{\tau_C} + \sum_{i=1}^{219} a_i^{\tau_C} \cdot \psi_{L_i}(\xi)) \ln 10} \\ \tau_L(\xi) = e^{(a_0^{\tau_L} + \sum_{i=1}^{219} a_i^{\tau_L} \cdot \psi_{L_i}(\xi)) \ln 10} \end{cases} \quad \text{Eqn III.32}$$

Les coefficients de qualité correspondant dans le [Tableau III.8](#) permettent de constater que le modèle de substitution construit (t45%) est de bonne qualité. De plus, l'observation de la figure

ci-avant montre un faible écart entre les réponses du modèle microscopique et celles du modèle de substitution les premiers instants, qui devient quasi-nulle dès 15 ans.

Le tableau ci-dessous présente les facteurs de qualité obtenus en appliquant la méthode de Levenberg-Marquardt d'une part et celle en considérant le point d'inflexion de la sigmoïde à 45% d'autre part. La mauvaise qualité du DCP à l'ordre 3 pour  $\tau_L$  dans le premier cas est bien observée,  $Q_{VC}^2 = 0,032$  contre dans le second cas  $Q_{VC}^2 = 0,966$ , qui est celui qui a été retenu et présenté à l'équation précédente (Eqn III.32).

Tableau III.8 : Coefficients de qualité des DCP d'ordre 3 sur  $\varepsilon_{Vmax}$ ,  $\tau_C$ ,  $\tau_L$ , en conditions atmosphériques

<b><math>p = 3, k = 9, P = 220, r = 8000</math></b> Levenberg-Marquardt sur $\tau_C$ et $\tau_L$						<b><math>p = 3, k = 9, P = 220, r = 8000</math></b> Point d'inflexion à 45% pour déterminer $\tau_C$ et $\tau_L$					
	$R^2$	$R_{aj}^2$	$Q_{VC}^2$	$Q_{Loo}^2$	$Q_{LooA}^2$		$R^2$	$R_{aj}^2$	$Q_{VC}^2$	$Q_{Loo}^2$	$Q_{LooA}^2$
$\varepsilon_{VMax}$	0,995	0,995	0,994	0,908	0,906	$\varepsilon_{VMax}$	0,994	0,994	0,995	0,967	0,967
$\tau_C$	0,952	0,951	0,948	0,890	0,887	$\tau_C$	0,930	0,929	0,928	0,926	0,924
$\tau_L$	0,075	0,049	0,032	-15,1	-15,6	$\tau_L$	0,967	0,966	0,966	0,965	0,964

### III.5.2 Modèle de substitution en conditions accélérées

Le modèle de substitution construit dans cette section permet de déterminer le gonflement volumique d'un VER dû à la RAG en conditions accélérées (Température constante à 38 °C). Il sera utilisé dans le chapitre 4 pour l'application sur une éprouvette. Les mêmes étapes que celles indiquées dans la sous-section précédente ont été déployées. Dix mille cinétiques ont donc été déterminées par simulations de Monte-Carlo en contions accélérées. Les paramètres  $\varepsilon_{VMax}$ ,  $\tau_C$ ,  $\tau_L$ , ont été déterminés en considérant un point fixe à 45% du gonflement maximal pour toutes les sigmoïdes. Les 3 développements en chaos polynômial construits sur chaque paramètre ont les mêmes expressions que précédemment (Eqn III.32), mais avec des coefficients différents donnés en Annexe C. Le tableau ci-dessous présente les coefficients de qualité obtenus.

Tableau III.9 : Coefficients de qualité des DCP d'ordre 3 sur  $\varepsilon_{Vmax}$ ,  $\tau_C$ ,  $\tau_L$ , en conditions accélérées

<b><math>p = 3, k = 9, P = 220, r = 8000</math></b>					
	$R^2$	$R_{aj}^2$	$Q_{VC}^2$	$Q_{Loo}^2$	$Q_{LooA}^2$
$\varepsilon_{VMax}$	0,99485	0,99472	0,99451	0,97749	0,97692
$\tau_C$	0,94848	0,94719	0,94028	0,92834	0,92654
$\tau_L$	0,97055	0,96982	0,97003	0,96476	0,96388

Les moyennes et écarts-type de l'erreur évalués pareillement qu'au cas précédent, permettent de constater sur la figure ci-après que le modèle de substitution obtenu est de bonne qualité. En effet, la moyenne est de 0,07 % (le gonflement étant évalué en pourcentage) en début de cinétiques et passe à 0 en un peu moins de 2 ans.

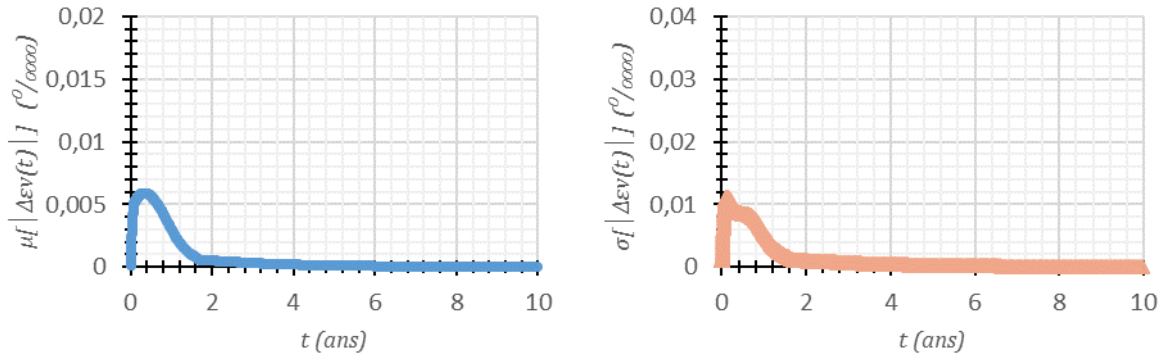


Figure III.23 : Moyennes et écarts-type de l'erreur absolue du modèle de substitution sur 10000 cinétiques en conditions accélérées

Une légère amélioration de la qualité du modèle de substitution en conditions accélérées relativement à celle du modèle de substitution en conditions atmosphériques de Song Loulou se dégage aussi en comparant les courbes d'erreurs des deux cas. Cela est probablement justifié par le fait que les paramètres varient moins pour un groupe de cinétiques rapides.

### III.6 Synthèse

La construction d'un modèle de substitution au modèle microscopique du LMDC, au cours de ce chapitre, s'est avérée périlleuse et pleine de rebondissements. En effet, les calculs de divers types d'erreurs montrant une mauvaise performance du modèle de substitution obtenu par la méthode classique relativement au modèle microscopique de départ, nous avons travaillé à une autre solution. Nous avons ainsi proposé et implémenté un modèle de substitution « hybride » basé sur l'expression mathématique d'une sigmoïde dont les trois paramètres sont approchés par des développements en chaos de polynômes de Legendre des 9 variables aléatoires précédentes. Pour ce faire, nous avons étudié deux cas principaux de construction de la sigmoïde dont le premier avec un point d'inflexion à 45% de la valeur maximale, et le second s'appuyant sur la méthode de régression non linéaire de Levenberg-Marquardt. Bien que cette dernière permette d'obtenir une sigmoïde plus proche de la courbe initiale, les développements en chaos sur 2 de ses 3 coefficients étaient moins précis. Nous avons établi que cela est imputable au fait que les fonctions de répartition de ces cas, obtenues en classant les réalisations aléatoires de ces 2 coefficients par ordre croissant, ne sont pas suffisamment « lisses ». Nous avons proposé une solution (qui devrait être affinée ultérieurement) pour résoudre le problème, notamment la composition supplémentaire par la fonction logarithme sur les paramètres de la sigmoïde. Cette méthode de

construction de modèle de substitution basée sur la composition de fonction combinée à l'utilisation du développement en chaos de polynômes orthogonaux, est une des contributions de la thèse. Elle a été illustrée sur des exemples simples avant d'être appliquée à l'évaluation du gonflement volumique de la RAG en conditions atmosphériques et accélérées. Ayant obtenu un modèle de substitution avec une erreur d'approximation par validation croisée de moins de 2%. Ce modèle de substitution sera utilisé pour la suite de notre étude.





## CHAPITRE IV

### Anisotropie du gonflement de RAG sous chargement d'une éprouvette



<b>IV.1</b>	<b>INTRODUCTION .....</b>	<b>116</b>
<b>IV.2</b>	<b>REVUE BIBLIOGRAPHIQUE SUR L'ANISOTROPIE DE LA RAG .....</b>	<b>116</b>
IV.2.1	SYNTHESE DES TRAVAUX SUR LA RAG DU BETON SOUS CONTRAINTES .....	116
IV.2.2	FONCTION POIDS DE [SAOUMA & PEROTTI 2006].....	118
IV.2.3	SYNTHESE .....	120
<b>IV.3</b>	<b>NOUVELLES EXPRESSIONS DE FONCTION POIDS .....</b>	<b>121</b>
IV.3.1	SCHEMA DE LA PROPOSITION .....	121
IV.3.2	ALGORITHME DE CALCUL ET D'UTILISATION DE FONCTIONS POIDS DANS UN CODE EF .....	123
IV.3.3	COMPARAISON DES RESULTATS SUR NEUF EXEMPLES SIMPLES. ....	124
<b>IV.4</b>	<b>EPROUVETTE CYLINDRIQUE SUJETTE A UNE RAG ANISOTROPE .....</b>	<b>125</b>
IV.4.1	CINETIQUE DE GONFLEMENT VOLUMIQUE ISOTROPE DE RAG.....	125
IV.4.2	PRESENTATION DES CONFIGURATIONS ETUDIEES EXPERIMENTALEMENT ET PAR CALCUL SOUS CAST3M.....	126
<b>IV.5</b>	<b>SYNTHESE .....</b>	<b>134</b>

## IV.1 Introduction

Les effets mécaniques consécutifs au gonflement du béton sous l'effet de la RAG sont anisotropes. La principale raison à cela est la présence de vases d'expansion au gel gonflant formé, qui permettent de réduire et d'orienter la pression qu'il exerce sur la matrice cimentaire, associés à la porosité des granulats et à la formation de fissures. La géométrie de la structure et son comportement mécanique sous le chargement de service appliqué ont alors également un effet d'anisotropie. Il importe ainsi d'aborder de façon globale les effets du gonflement [Grimal *et al.* 2008, Morenon *et al.* 2017]. La première étape de validation d'une modélisation consiste à confronter les résultats de la modélisation aux mesures réalisées sur une éprouvette sous différentes conditions d'anisotropie de chargement imposées. C'est le principal objectif du présent chapitre.

Une fois construit le modèle de substitution du modèle microscopique de RAG, prévoyant le gonflement libre isotrope du gel, il vient la nécessité de prendre en compte son anisotropie. Les principales études de l'anisotropie disponibles dans la littérature sont ainsi brièvement décrites dans la première section du présent chapitre. Nous retenons à l'issue de cette section une méthode simple de prise en compte de l'anisotropie par l'utilisation de fonction poids [Saouma & Perotti 2006], auxquelles nous apportons quelques modifications.

Dans la seconde section, nous exposons les nouvelles expressions de fonction poids que nous proposons pour rendre compte de l'anisotropie de la RAG. Ensuite, dans la troisième section, la comparaison entre les résultats expérimentaux et les résultats des calculs sur une éprouvette sujette à une RAG anisotrope effectués dans Cast3M, permettra de valider les fonctions poids proposées. Nous terminerons ce chapitre par une synthèse.

## IV.2 Revue bibliographique sur l'anisotropie de la RAG

Des études ont eu pour objectif d'évaluer les pressions réellement atteintes dans les mortiers et bétons endommagés par la RAG, dans l'optique de mieux comprendre les effets de cette dernière sur les ouvrages affectés. Dans un premier temps, nous ferons une brève présentation de la synthèse des travaux qui ont étudié l'effet des contraintes sur le gonflement induit par la RAG. Dans ce second temps, nous nous attarderons sur la proposition de [Saouma & Perotti 2006] pour la prise en compte de l'anisotropie dans la répartition du gonflement volumique de RAG à l'aide de fonctions poids. Nous terminerons ce paragraphe par une synthèse.

### IV.2.1 Synthèse des travaux sur la RAG du béton sous contraintes

[Le Roux *et al.* 1992] ont utilisé une carotte prise sur un ouvrage en béton pour y appliquer des contraintes uniaxiales jusqu'à 5 MPa. Plus la charge uniaxiale est importante (0, 3 et 5 MPa), plus le gonflement est réduit dans la direction de la charge. Quantitativement, le gonflement libre est d'environ 0,7 % et il est quasiment annulé sous 5 MPa dans la direction d'application de la charge.

[Larive 1997] a testé des éprouvettes chargées avec des contraintes plus importantes (5, 10 et 20 MPa). Lors de ces tests, menés sous une humidité relative supérieure à 96% et une température de 38°C, la composition du gel créé et la prise de masse des éprouvettes ont été suivies régulièrement. Aucune de ces deux caractéristiques ne semble avoir été affectée par l'application d'une charge. Les phénomènes de dissolution puis de précipitation ne semblent donc pas être dépendants d'un chargement uniaxial. La déformation axiale diminue avec l'augmentation de la charge. L'influence de la contrainte uniaxiale sur les déformations radiales interroge dans ce travail. En effet, pour les charges de 5 et 10 MPa la déformation radiale augmente avec la charge. Pour 20 MPa, l'expansion est la même que dans le cas non-chargé. Les éprouvettes déchargées au cours de l'expérience montrent, après un temps de latence, une reprise des gonflements similaire aux éprouvettes non-chargées. La contrainte uniaxiale ne perturberait donc pas la chimie de la réaction.

[Multon & Toutlemonde 2006] ont étudié, entre autres, le comportement d'éprouvettes cylindriques tant en gonflement libre que soumises à une contrainte verticale (10 ou 20 MPa) et/ou à un frettage radial constitué par des anneaux métalliques (épaisseur des anneaux : 3 ou 5 mm), dans lesquelles se développait un gonflement supposé *a priori* anisotrope. Les déformations longitudinales des cas frettés sont toujours supérieures aux cas non frettés. La déformation empêchée radialement se reporte dans le sens longitudinal. Les déformations radiales des éprouvettes frettées sont toujours inférieures aux cas non frettés car le gonflement est alors gêné dans cette direction. Les résultats expérimentaux de ce travail seront utilisés plus tard pour validation des fonctions poids proposées.

En s'appuyant sur le travail précédent, ainsi que sur le modèle macroscopique de [Grimal 2007, Bourdarot *et al.* 2010, Multon & Sellier 2016, Sellier *et al.* 2016], [Morenon *et al.* 2017] ont proposé de prendre en compte l'anisotropie en établissant un équilibre en contrainte et pression exercée par le gel. Après la définition et la validation d'un modèle poro-mécanique, les auteurs décrivent à l'aide de leur modèle, les effets des contraintes appliquées (dans une, deux ou trois directions) sur les déformations et endommagements induits par la RAG, et comparent les résultats obtenus aux données expérimentales.

[Dunant 2009, Dunant & Scrivener 2012] réalisent leurs essais avec des éprouvettes immergées dans une solution alcaline semblable à celle du béton en fin d'hydratation en terme de concentration en alcalins. Le lessivage des alcalins est ainsi limité. Les essais sont réalisés avec des contraintes allant de 5 à 15 MPa. Plus la charge est élevée, plus la déformation verticale est faible. A partir de 10 MPa, elle est même annulée et devient négative à 20 MPa. Au niveau de la déformation radiale, elle augmente avec la charge mais reste toujours inférieure à celle obtenue en gonflement libre, tout comme la déformation volumique. L'auteur explique ce phénomène par un changement micromécanique de la fissuration.

Ce changement micromécanique est la base de la modélisation proposée par [Charpin 2013, Charpin & Ehrlicher 2014b] et prenant en compte l'anisotropie de la réaction. Dans son

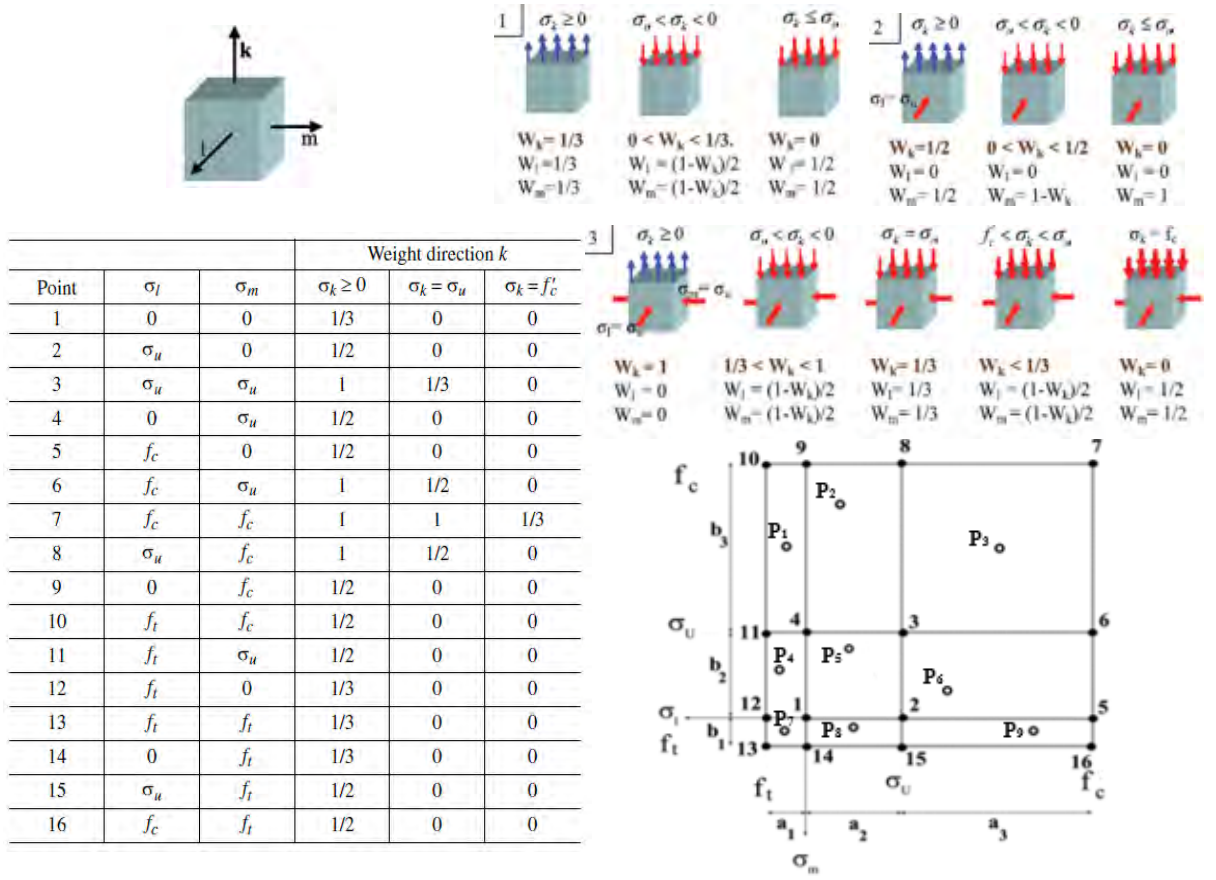
travail de thèse, Laurent Charpin considère que l'alcali-réaction provoque un gonflement du béton dû à une fissuration microscopique sous pression de produits de réaction qui sont des gels gonflant par absorption d'eau. Cette fissuration microscopique se développe en fonction du chargement local du béton, ce qui induit une anisotropie de comportement et de déformation du béton. Son objectif est de simuler, à partir d'hypothèses simples sur les mécanismes réactionnels en jeu, pour une classe de granulats à réactivité rapide, le déroulement de la fissuration du béton au niveau microscopique, de façon à estimer les déformations et les propriétés mécaniques du béton attaqué. Il utilise pour cela une description micromécanique du béton qui lui permet de calculer les propriétés mécaniques et les déformations en fonction de l'état de fissuration, et un critère énergétique de fissuration de façon à faire évoluer l'état de fissuration.

En synthèse des quelques travaux présentés précédemment, trois faits majeurs ressortent. Premièrement, les diverses expériences menées pour étudier la RAG sous chargement font apparaître un niveau de contrainte, qui sera noté  $\sigma_u$ , à partir duquel le gonflement est annulé dans une direction. La valeur de  $\sigma_u$  varie globalement de -10 MPa à -3 MPa selon les auteurs cités précédemment dans ce paragraphe, et de -11 à -0,1 MPa selon les travaux sur des gels synthétiques de [Struble & Diamond 1981]. Deuxièmement, un report du gonflement plus ou moins important dans les autres directions, selon leur état de contrainte est généralement observé. Bref, moins une direction est comprimée, plus grande sera la part de gonflement effectif dans cette direction. Troisièmement, à l'exception de la proposition de [Saouma & Perotti 2006], objet du prochain sous-paragraphe, la prise en compte de l'anisotropie dans les modélisations de la RAG est intrinsèque aux modèles ([Charpin & Ehrlacher 2014a, Morenon *et al.* 2017]).

#### IV.2.2 Fonction poids de [Saouma & Perotti 2006]

Saouma et Perotti ont proposé en 2006, un modèle de RAG dont une partie est dédiée à la prise en compte de l'anisotropie de gonflement à travers des fonctions poids de redistribution des déformations induites par la RAG suivant les trois directions principales des contraintes. Cette déformation est ensuite imposée comme une déformation thermique. La fonction de pondération utilise des résultats d'autres modèles [Ulm *et al.* 2000] pour l'effet de la température et de [Capra & Bournazel 1998]; [Larive 1997] pour l'effet de l'humidité. Ils ont élaboré un abaque qui permet de choisir les coefficients de pondération du gonflement libre à utiliser pour la répartition volumétrique des gonflements en fonction du signe et de la valeur de la contrainte appliquée. Sur la Figure IV.1, seize points disposés en neuf quadrants matérialisent toutes les configurations particulières de contraintes avec indications des fonctions poids correspondantes.

La démarche de détermination des poids de [Saouma & Perotti 2006] est donnée ci-après et illustrée par deux exemples. Sept autres exemples détaillés sont donnés en Annexe D pour couvrir les neuf quadrants possibles. Dans le sous-paragraphe IV.3.3, les résultats obtenus sont comparés à ceux produits à l'aide des nouvelles fonctions poids proposées.



La détermination du poids suivant la direction principale  $k$  se fait en suivant les trois grandes étapes ci-dessous sachant que le point 1 est l'origine du repère  $(\sigma_l, \sigma_m)$  dont le sens des axes est inversé (valeurs positives des contraintes vers la gauche et vers le bas).

1. Pour une contrainte  $\sigma_k$  donnée, identifier le quadrant contenant les valeurs de  $\sigma_l$  et  $\sigma_m$  du point en cours. Le poids est obtenu à l'aide d'une interpolation bilinéaire sur les valeurs  $W_{i=w,x,y,z}(k)$  aux quatre nœuds sommets du quadrant.

Exemple 1 :  $[\sigma_k = -7, \sigma_l = 1, \sigma_m = -20, \sigma_u = -10, f_c = -30, f_t = 2]$  MPa se trouvant à l'intérieur du quadrant 11-4-9-10, voir Figure IV.1.

Exemple 2 :  $[\sigma_k = 1, \sigma_l = -4, \sigma_m = -25, \sigma_u = -10, f_c = -30, f_t = 2]$  MPa se trouvant à l'intérieur du quadrant 4-3-8-9, voir Figure IV.1.

2. Déterminer les poids des nœuds sommets du quadrant par interpolation linéaire appropriée de  $\sigma_k$  à partir des valeurs de la figure ci-dessus, et des expressions ci-après (elles ne sont pas explicitement indiquées par [Saouma & Perotti 2006]).

$$W_{i=w,x,y,z}(\sigma_k) = \left( W_{min} + \frac{\sigma_u - \sigma_k}{\sigma_u} (W_{max} - W_{min}) \right) \left( W_{min} + \frac{f_c - \sigma_k}{f_c - \sigma_u} (W_{max} - W_{min}) \right)$$

Exemple 1 :

$$W_{11}(\sigma_k = -7) = 0 + \left( \frac{-30 - (-7)}{-30 - (-10)} \right) \left( \frac{1}{2} - 0 \right) = \frac{23}{40}, W_4(\sigma_k = -7) = 0 + \left( \frac{-30 - (-7)}{-30 - (-10)} \right) \left( \frac{1}{2} - 0 \right) = \frac{23}{40},$$

$$W_9(\sigma_k = -7) = 0 + \left( \frac{-30 - (-7)}{-30 - (-10)} \right) \left( \frac{1}{2} - 0 \right) = \frac{23}{40}, W_{10}(\sigma_k = -7) = 0 + \left( \frac{-30 - (-7)}{-30 - (-10)} \right) \left( \frac{1}{2} - 0 \right) = \frac{23}{40}$$

Exemple 2 :

$$W_4(\sigma_k = 1) = \frac{1}{2}, W_3(\sigma_k = 1) = 1, W_8(\sigma_k = 1) = 1, W_9(\sigma_k = 1) = \frac{1}{2}$$

3. Calculer les facteurs de forme  $N_{w,x,y,z}(\sigma_l \sigma_m)$  aux quatre sommets du quadrant, ainsi que  $W_k$  résultant.

$$N_w(\sigma_l, \sigma_m) = \frac{(a - \sigma_l)(b - \sigma_m)}{ab}, N_x(\sigma_l, \sigma_m) = \frac{\sigma_l(b - \sigma_m)}{ab}, N_y(\sigma_l, \sigma_m) = \frac{\sigma_l \sigma_m}{ab}, N_z(\sigma_l, \sigma_m) = \frac{(a - \sigma_l)\sigma_m}{ab}$$

$$W_k(\sigma_k, \sigma_l, \sigma_m) = \sum_{i=w,x,y,z} N_i(\sigma_l, \sigma_m) W_i(\sigma_k)$$

Exemple 1 : Dans ce cas la largeur du cadrant est  $a = a_1 = 2\text{MPa}$  et sa hauteur  $b = b_3 = -20\text{MPa}$

$$N_{11}(1, -20) = \frac{(2-1)(-20-(-10))}{-40} = \frac{1}{4}, N_4(1, -20) = \frac{1(-20+10)}{-40} = \frac{1}{4}$$

$$N_9(1, -20) = \frac{1(-10)}{-40} = \frac{1}{4}, N_{10}(1, -20) = \frac{-10(2-1)}{-40} = \frac{1}{4}$$

$$W_k(\sigma_l = 1, \sigma_m = -20, \sigma_k = -7) = \sum_{i=11,4,9,10} N_i(\sigma_l, \sigma_m) W_i(\sigma_k) = \frac{23}{160} + \frac{23}{160} + \frac{23}{160} + \frac{23}{160} = \frac{23}{40} = 0.575$$

Exemple 2 : Dans ce cas la largeur du cadrant est  $a = a_2 = -10\text{MPa}$  et sa hauteur  $b = b_3 = -20\text{MPa}$

$$N_4(-4, -25) = \frac{(-10+4)(-20+5)}{200} = \frac{9}{20}, N_3(-4, -25) = \frac{-4(-20+5)}{200} = \frac{3}{10}$$

$$N_8(-4, -25) = \frac{-4(-5)}{200} = \frac{1}{10}, N_9(-4, -25) = \frac{-5(-10+4)}{200} = \frac{3}{20}$$

$$W_k(\sigma_l = -4, \sigma_m = -25, \sigma_k = 1) = \sum_{i=4,3,8,9} N_i(\sigma_l, \sigma_m) W_i(\sigma_k) = \frac{9}{40} + \frac{3}{10} + \frac{1}{10} + \frac{3}{40} = 0,7$$

Une fois que la valeur de  $W_k$  a été obtenue, la détermination de  $W_l$  et  $W_m$  n'est explicite que pour quelques cas parmi tous les cas possibles (voir [Figure IV.1](#)).

### IV.2.3 Synthèse

Les approches pour la prise en compte de l'anisotropie proposées par [Charpin 2013, Charpin & Ehrlicher 2014b] et [Morenon *et al.* 2017], sont intimement liées aux hypothèses de modélisation de la RAG dans le béton considérées par ces derniers. Les premiers utilisent une description micromécanique du béton qui leur permet de calculer les propriétés mécaniques et les déformations en fonction de l'état de fissuration, et un critère énergétique de fissuration de façon à faire évoluer l'état de fissuration. Les seconds s'appuient sur la pression induite par le gel pour rendre compte du gonflement anisotrope. La détermination des effets de la RAG à travers le gonflement volumique, qui a été adoptée par le choix du modèle de [Multon *et al.* 2009], ne permet



pas de se servir des deux propositions précédentes. Les fonctions poids de [Saouma & Perotti 2006] ont justement été proposées pour la répartition d'un gonflement volumique de RAG, ce qui conviendrait pour la prise en compte de l'anisotropie dans notre cas. Cependant, elles ne sont pas explicites et impliquent trois étapes, dont une interpolation linéaire et une autre bilinéaire. De plus, elles ne tiennent pas compte du fait que les contraintes principales sont toujours classées par ordre, ce qui devrait permettre de réduire le nombre de cas possible. C'est la raison pour laquelle, nous avons proposé de nouvelles expressions de fonction poids pour faire le calcul en une seule étape, avec des expressions précises.

### **IV.3 Nouvelles expressions de fonction poids**

Un travail a été mené dans l'optique de palier les problèmes mis en exergue précédemment en partant des hypothèses ci-après :

- 1- La somme des poids est toujours égale à 1 ;
- 2- Le poids le plus faible est toujours affecté à la direction la plus compressée ;
- 3- Il existe une relation d'ordre entre les contraintes principales ( $\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$ ).

#### **IV.3.1 Schéma de la proposition**

Nous avons regroupé sur la figure ci-après, les dix cas de chargements possibles dans le repère des contraintes principales d'un VER de béton sujet à la RAG sous contraintes. Les expressions des fonctions poids correspondantes à chaque cas sont également données sur la même figure. L'algorithme correspondant, qui a été implémenté dans Cast3M (voir procédure en Annexe D), est donné dans le paragraphe suivant. Il est à noter que la détermination des fonctions poids pour la prise en compte de l'anisotropie se fait de manière incrémentale pour chaque échéance de temps où les contraintes principales sont évaluées dans la structure.

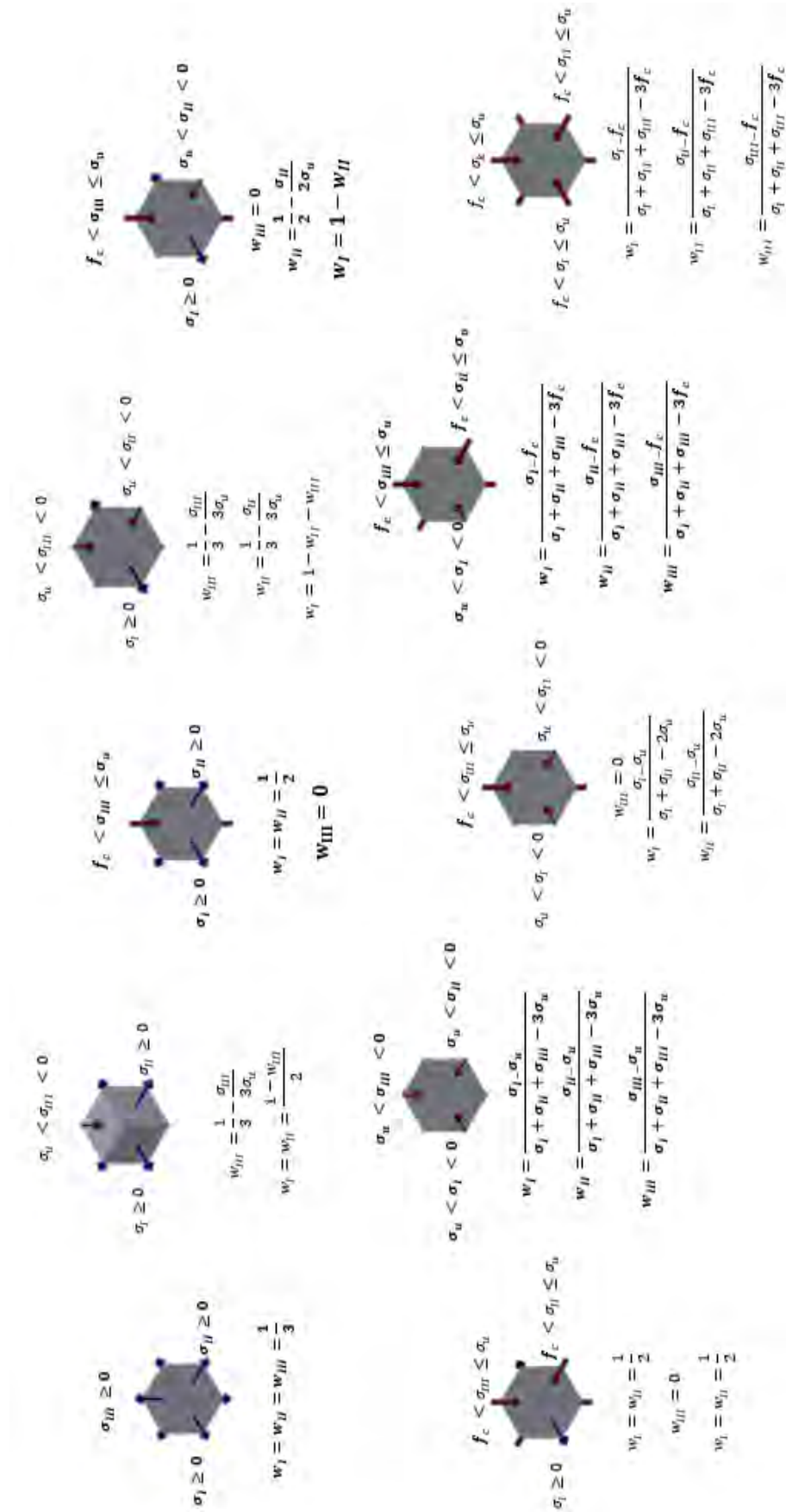


Figure IV.2 : Cas de chargements et expressions des fonctions poids proposées

## IV.3.2 Algorithme de calcul et d'utilisation de fonctions poids dans un code EF

Tableau IV.1 : Algorithme de détermination de fonctions poids à implémenter dans un code EF

**Entrées :**  $n$  le nombre de nœuds de la structure ;  $\sigma_u$ , la contrainte limite d'anisotropie ;  $f_c$ , contrainte limite de compression ;  $f_t$ , contrainte limite de traction ;  $\sigma_I^i, \sigma_{II}^i, \sigma_{III}^i$  ( $\sigma_I^i \geq \sigma_{II}^i \geq \sigma_{III}^i$ ),  $i = 1, \dots, n$  ; les contraintes principales en chaque nœud de la structure ;  $COX_I^i, COY_I^i, COZ_I^i, COX_{II}^i, COY_{II}^i, COZ_{II}^i, COX_{III}^i, COY_{III}^i, COZ_{III}^i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , les cosinus directeurs des 3 directions principales  $I, II$  et  $III$   
**Sorties :** Les vecteurs poids  $W_{XX}, W_{YY}, W_{ZZ}, W_{XY}, W_{XZ}, W_{YZ}$  donnés dans repère général (X, Y, Z) et/ou les vecteurs poids  $W_I, W_{II}, W_{III}$  dans le repère principal ( $I, II, III$ )

**Début**

**Si**  $\sigma_I^i \geq f_t$  ou **si**  $\sigma_{III}^i \leq f_c$  **alors**  $w_I^i = w_{II}^i = w_{III}^i = \frac{1}{3}$   
**Sinon**  
     **Si**  $\sigma_I^i \geq 0$   
         **Si**  $\sigma_{II}^i \geq 0$   
             **Si**  $\sigma_{III}^i \geq 0$  **alors**  $w_I^i = w_{II}^i = w_{III}^i = \frac{1}{3}$   
             **Sinon si**  $\sigma_u < \sigma_{III}^i < 0$  **alors** (Eqn IV.1) et (Eqn IV.2)  
             **Sinon si**  $f_c < \sigma_{III}^i \leq \sigma_u$  **alors**  $w_I^i = w_{II}^i = \frac{1}{2}$  et  $w_{III}^i = 0$   
             **Fin si**  
         **Sinon si**  $\sigma_u < \sigma_{II}^i < 0$   
             **Si**  $\sigma_u < \sigma_{III}^i < 0$  **alors** (Eqn IV.3), (Eqn IV.4) et (Eqn IV.5)  
             **Sinon si**  $f_c < \sigma_{III}^i \leq \sigma_u$  **alors**  $w_{III}^i = 0$ , (Eqn IV.6) et (Eqn IV.7)  
             **Fin si**  
         **Sinon si**  $f_c < \sigma_{II}^i \leq \sigma_u$  **alors**  $w_I^i = 1$  et  $w_{II}^i = w_{III}^i = 0$   
         **Fin si**  
     **Sinon si**  $\sigma_u < \sigma_I^i < 0$   
         **Si**  $\sigma_u < \sigma_{II}^i < 0$   
             **Si**  $\sigma_u < \sigma_{III}^i < 0$  **alors** (Eqn IV.8), (Eqn IV.9) et (Eqn IV.10)  
             **Sinon si**  $f_c < \sigma_{III}^i \leq \sigma_u$  **alors**  $w_{III}^i = 0$ , (Eqn IV.11) et (Eqn IV.12)  
             **Fin si**  
         **Sinon si**  $f_c < \sigma_{II}^i \leq \sigma_u$  **alors** (Eqn IV.13), (Eqn IV.14) et (Eqn IV.15)  
         **Fin si**  
     **Sinon si**  $f_c < \sigma_I^i \leq \sigma_u$  **alors** (Eqn IV.16), (Eqn IV.17) et (Eqn IV.18)  
     **Fin si**  
**Fin si**  
     Opérer le passage du repère principal au repère général à l'aide de (Eqn IV.19)  
**Retour**  
**Fin**

Equations des diverses expressions des fonctions poids :

$$w_{III}^i = \frac{1}{3} - \frac{\sigma_{III}^i}{3\sigma_u} \quad \text{Eqn IV.1}$$

$$w_I^i = w_{II}^i = \frac{1 - w_{III}^i}{2} \quad \text{Eqn IV.2}$$

$$w_{III}^i = \frac{1}{3} - \frac{\sigma_{III}^i}{3\sigma_u} \quad \text{Eqn IV.3}$$

$$w_{II}^i = \frac{1}{3} - \frac{\sigma_{II}^i}{3\sigma_u} \quad \text{Eqn IV.4}$$

$$w_I^i = 1 - w_{II}^i - w_{III}^i \quad \text{Eqn IV.5}$$

$$w_{II}^i = \frac{1}{2} - \frac{\sigma_{II}^i}{2\sigma_u} \quad \text{Eqn IV.6}$$

$$w_I^i = 1 - w_{II}^i \quad \text{Eqn IV.7}$$

$$w_I^i = \frac{\sigma_I^i - \sigma_u}{\sigma_I^i + \sigma_{II}^i + \sigma_{III}^i - 3\sigma_u} \quad \text{Eqn IV.8}$$

$$w_{II}^i = \frac{\sigma_{II}^i - \sigma_u}{\sigma_I^i + \sigma_{II}^i + \sigma_{III}^i - 3\sigma_u} \quad \text{Eqn IV.9}$$

$$w_{III}^i = \frac{\sigma_{III}^i - \sigma_u}{\sigma_I^i + \sigma_{II}^i + \sigma_{III}^i - 3\sigma_u} \quad \text{Eqn IV.10}$$

$$w_I^i = \frac{\sigma_I^i - \sigma_u}{\sigma_I^i + \sigma_{II}^i - 2\sigma_u} \quad \text{Eqn IV.11}$$

$$w_{II}^i = \frac{\sigma_{II}^i - \sigma_u}{\sigma_I^i + \sigma_{II}^i - 2\sigma_u} \quad \text{Eqn IV.12}$$

$$w_I^i = \frac{\sigma_I^i - f_c}{\sigma_I^i + \sigma_{II}^i + \sigma_{III}^i - 3f_c} \quad \text{Eqn IV.13}$$

$$w_{II}^i = \frac{\sigma_{II}^i - f_c}{\sigma_I^i + \sigma_{II}^i + \sigma_{III}^i - 3f_c} \quad \text{Eqn IV.14}$$

$$w_{III}^i = \frac{\sigma_{III}^i + f_c}{\sigma_I^i + \sigma_{II}^i + \sigma_{III}^i - 3f_c} \quad \text{Eqn IV.15}$$

$$w_I^i = \frac{\sigma_I - f_c}{\sigma_I^i + \sigma_{II}^i + \sigma_{III}^i - 3f_c} \quad \text{Eqn IV.16}$$

$$w_{II}^i = \frac{\sigma_{II}^i - f_c}{\sigma_I^i + \sigma_{II}^i + \sigma_{III}^i - 3f_c} \quad \text{Eqn IV.17}$$

$$w_{III}^i = \frac{\sigma_{III}^i - f_c}{\sigma_I^i + \sigma_{II}^i + \sigma_{III}^i - 3f_c} \quad \text{Eqn IV.18}$$

Expression de passage du repère principal au repère général :

$$\begin{bmatrix} W_{XX}^i \\ W_{YY}^i \\ W_{ZZ}^i \\ W_{XY}^i \\ W_{XZ}^i \\ W_{YZ}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (COX_I^i)^2 & (COX_{II}^i)^2 & (COX_{III}^i)^2 \\ (COY_I^i)^2 & (COY_{II}^i)^2 & (COY_{III}^i)^2 \\ (COZ_I^i)^2 & (COZ_{II}^i)^2 & (COZ_{III}^i)^2 \\ COX_I^i \cdot COY_I^i & COX_{II}^i \cdot COY_{II}^i & COX_{III}^i \cdot COY_{III}^i \\ COX_I^i \cdot COZ_I^i & COX_{II}^i \cdot COZ_{II}^i & COX_{III}^i \cdot COZ_{III}^i \\ COY_I^i \cdot COZ_I^i & COY_{II}^i \cdot COZ_{II}^i & COY_{III}^i \cdot COZ_{III}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_I^i \\ W_{II}^i \\ W_{III}^i \end{bmatrix} \quad \text{Eqn IV.19}$$

### IV.3.3 Comparaison des résultats sur neuf exemples simples.

Nous avons constitué neuf exemples pour couvrir l'ensemble des quadrants possibles de la [Figure IV.1](#). Dans chaque cas, les poids dans les trois directions principales ont été déterminés d'une part à partir de la proposition de Saouma ([Annexe D](#)), et d'autre part à partir de la nouvelle proposition ([Annexe D](#)). Le tableau ci-dessous permet de comparer les résultats obtenus.

Tableau IV.2 : Comparaison des valeurs de poids sur neuf exemples simples.

N° exemple	Données						Quadrant	Poids de [Saouma & Perotti 2006]			Poids proposés		
	$\sigma_k$	$\sigma_l$	$\sigma_m$	$\sigma_n$	$f_c$	$f_t$		$w_k$	$w_l$	$w_m$	$w_k$	$w_l$	$w_m$
1	-7	1	-20	-10	-30	2	11-4-9-10	0,575	0,425	0	0,15	0,85	0
2	1	-4	-25	-10	-30	2	4-3-8-9	0,7	0,3	0	0,7	0,3	0
3	-11	-20	-20	-10	-30	2	3-6-7-8	0,55833	0,22084	0,22084	0,48717	0,25641	0,25641
4	-6	1	-5	-10	-30	2	12-1-4-11	0,18333	?	?	0,13333	0,7	0,16666
5	-5	-5	-8	-10	-30	2	1-2-3-4	0,40833	?	?	0,41666	0,41666	0,16666
6	-6	-15	-2	-10	-30	2	2-5-6-3	0,295	?	?	0,33333	0	0,66666
7	-6	1	1	-10	-30	2	13-14-1-12	0,13333	0,43333	0,43333	0,13333	0,43333	0,43333
8	-6	-5	1	-10	-30	2	14-15-2-1	0,1	?	?	0,13333	0,16666	0,7
9	-20	-25	1	-10	-30	2	15-16-5-2	0	0	1	0	0	1

Nous constatons une parfaite concordance pour les exemples 2, 7 et 9. Dans le cadre des exemples 4, 5, 6 et 8, nous n'avons pu déterminer qu'un poids sur trois, les informations disponibles dans [Saouma & Perotti 2006] et [Saouma 2014] ne permettraient pas de faire mieux. Pour l'exemple 1 les fonctions de [Saouma & Perotti 2006] donnent des valeurs suivant  $k$  et  $l$  qui ne sont pas conformes aux observations expérimentales. En effet,  $l$  étant la direction la moins chargée, est censée avoir le poids le plus élevé, contrairement à ce qu'on constate dans ce cas.

#### IV.4 Epreuve cylindrique sujette à une RAG anisotrope

Dans ce paragraphe, il est question de valider notre proposition de fonctions poids sur le cas d'une éprouvette cylindrique sujette à la RAG et à une combinaison de chargements (axial, radial ou les deux). Pour ce faire, nous allons modéliser une éprouvette sous Cast3M et réaliser des calculs dans les mêmes conditions que celles des expériences de [Multon 2003]. Nous pourrions ainsi comparer les résultats obtenus aux valeurs expérimentales. Notons que ces calculs constituent également des exemples d'application.

##### IV.4.1 Cinétique de gonflement volumique isotrope de RAG

A partir des expressions du modèle de substitution et les valeurs des paramètres physiques (obtenus par ingénierie inverse) indiquées dans le [Tableau IV.3](#), on obtient la sigmoïde représentée sur la [Figure IV.3](#).

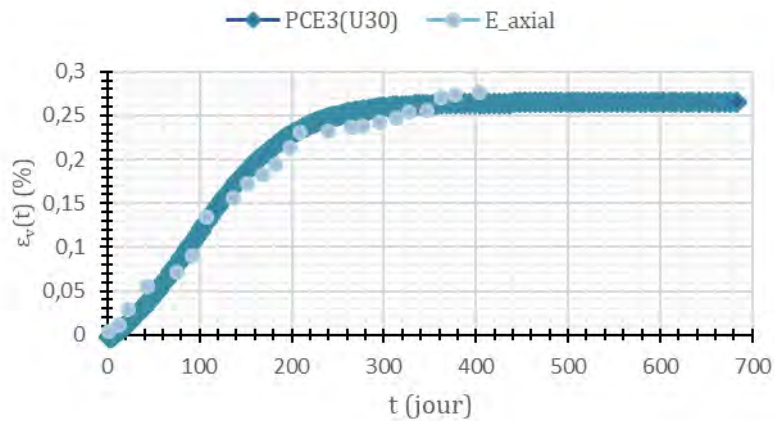


Figure IV.3 : Cinétique expérimentale de RAG approchée par le modèle de substitution

Sur la figure précédente, on remarque que la cinétique de gonflement volumique générée par le modèle de substitution correspond bien à la cinétique observée expérimentalement, pour les valeurs des paramètres ajustés données ci-dessous. Par la suite ces paramètres restent identiques. L'ajustement n'est ainsi réalisé qu'une seule fois à partir d'un essai de gonflement libre, ce qui présente un grand intérêt méthodologique.

Tableau IV.3: Paramètres physiques permettant d'obtenir la cinétique expérimentale

V.A.	Description	Plage	Valeur	Unité
X <sub>1</sub>	Diamètre minimal de la plus petite classe granulaire	0 à 2	<b>1</b>	Mm
X <sub>2</sub>	Diamètre minimal de la classe granulaire intermédiaire	4 à 6	<b>5</b>	Mm
X <sub>3</sub>	Diamètre minimal de la plus grande classe granulaire	10 à 20	<b>15</b>	Mm
X <sub>4</sub>	Diamètre maximal de la plus grande classe granulaire	32 à 125	<b>70.828</b>	Mm
X <sub>5</sub>	Concentration volumique de granulat par m <sup>3</sup> de béton	0.6 à 0.75	<b>0.6088</b>	-
X <sub>6</sub>	Fraction de la plus petite classe granulaire dans les granulats	0.25 à 0.55	<b>0.3425</b>	-
X <sub>7</sub>	Fraction de la classe granulaire intermédiaire dans les granulats	0.05 à 0.25	<b>0.15</b>	-
X <sub>8</sub>	Concentration initiale d'alcalin dans la pâte de ciment	100 à 250	<b>155.33</b>	mol/m <sup>3</sup>
X <sub>9</sub>	Quantité de silice soluble pour la plus petite classe granulaire (Sable)	1000 à 3000	<b>2000</b>	mol/m <sup>3</sup> de gran.
X <sub>10</sub>	Quantité de silice soluble prise identique pour les autres classes granulaires et réactivité moyenne	1000 à 3000	<b>2000</b>	mol/m <sup>3</sup> de gran.
X <sub>11</sub>	Porosité du mortier	0.1 à 0.3	<b>0.2706</b>	-
X <sub>12</sub>	Porosité des petits granulats	0.01 à 0.05	<b>0.03</b>	-
X <sub>13</sub>	Porosité des granulats prise identique pour les autres classes granulaires	0.01 à 0.05	<b>0.03</b>	-
X <sub>14</sub>	Distance sur laquelle le gel peut migrer pour les petits granulats	1 à 10	<b>2.9406</b>	μm
X <sub>15</sub>	Distance sur laquelle le gel peut migrer pour les autres granulats	1 à 10	<b>5.5</b>	μm
X <sub>16</sub>	Coefficients de diffusion des alcalins pour les petits granulats	2.10 <sup>-13</sup> à 7.10 <sup>-13</sup>	<b>4,5.10<sup>-13</sup></b>	m <sup>2</sup> /s
X <sub>17</sub>	Coefficients de diffusion des alcalins pour les autres granulats	2.10 <sup>-13</sup> à 7.10 <sup>-13</sup>	<b>4,5.10<sup>-13</sup></b>	m <sup>2</sup> /s
X <sub>18</sub>	Volume molaire du gel créé	1.10 <sup>-5</sup> à 1,6.10 <sup>-5</sup>	<b>1,477.10<sup>-5</sup></b>	m <sup>3</sup> /mol
X <sub>19</sub>	Nombre de mole de Na réagissant avec 1 mole de Si pour former le gel (dépend de Na <sub>2</sub> O <sub>eq</sub> /SiO <sub>2</sub> )	0,39 à 0,59	<b>0.4898</b>	-
X <sub>20</sub>	Coefficient de fixation des alcalins pris idem pour toutes les classes	-1.10 <sup>-7</sup> à -1.10 <sup>-9</sup>	<b>-5,9745.10<sup>-8</sup></b>	m <sup>3</sup> /m <sup>3</sup> /s

#### IV.4.2 Présentation des configurations étudiées expérimentalement et par calcul sous Cast3M

En s'appuyant sur les travaux de [Multon 2003, Hong *et al.* 2014 ], nous allons étudier le comportement d'éprouvettes cylindriques de rayon extérieur Re (65 mm) et de hauteur h (240 mm) en gonflement libre ou soumises à une contrainte verticale (10 ou 20 MPa), et/ou à un fretage radial constitué par des anneaux métalliques d'épaisseur 3 ou 5 mm, dans lesquelles se développe un gonflement supposé *a priori* anisotrope. Les calculs ont été réalisés avec des modules d'Young de 193000 MPa (module de l'acier) et 11200 MPa (module différé du béton), et des

coefficients de Poisson de 0,3 et 0,22 pour l'acier et le béton réactif respectivement. Les caractéristiques mécaniques de l'acier des anneaux ont été fournies par le fabricant ; Celles du béton obtenues par des essais effectués sur éprouvettes. Le module différé du béton est la valeur à long terme obtenue en calculant la moyenne des modules à court terme obtenus entre 28 jours et 1 an (33600 MPa), divisée par 3 selon les recommandations des Eurocodes 2.

Pour chaque configuration, les informations utiles (contraintes, déformations, déplacements) sont recueillies aux vingt-cinq points (5x4 sur génératrices + 5 axiaux) de la figure ci-après.

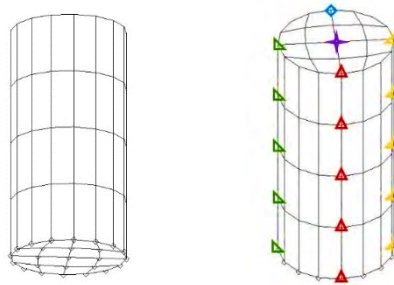


Figure IV.4 : Points de mesure sur l'éprouvette dans Cast3M

#### IV.4.2.1 Epreuve sous compression axiale de 0, 10 et 20 Mpa

La première configuration étudiée est le cas de chargement axial sans confinement avec des contraintes de compression axiales de 0, 10 et 20 Mpa.

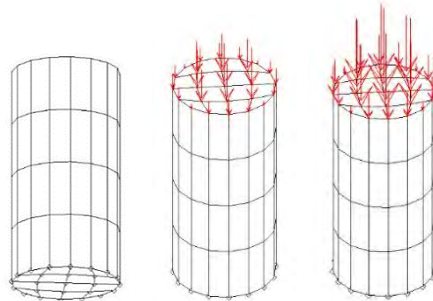


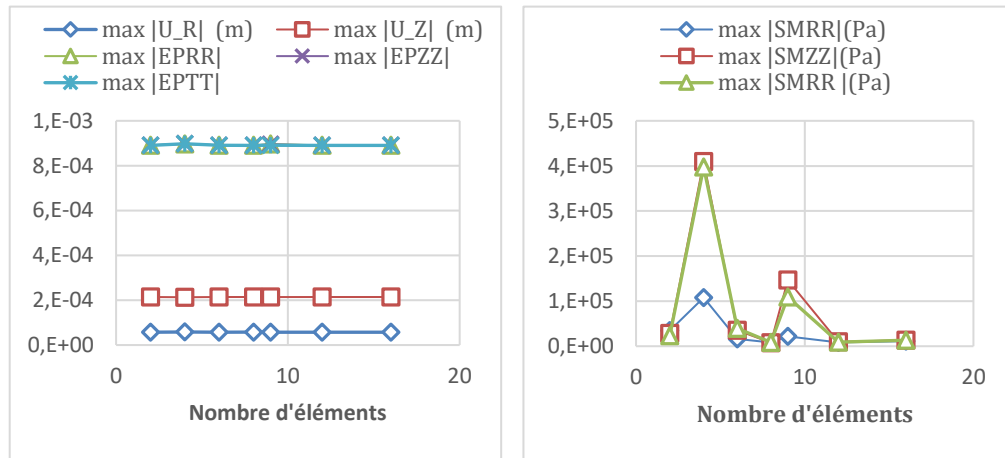
Figure IV.5 : Divers cas de compression uniaxiales étudiées (0, 10 et 20MPa)

Etant donné que ce cas présente une axisymétrie sans difficulté d'implémentation sous Cast3M, nous avons utilisé cette condition simplifiée pour ces calculs. La Figure IV.6 contient les résultats obtenus pour un calcul en gonflement libre en faisant varier le nombre d'éléments dans le maillage de 2 à 16 en axisymétrie.

Nous constatons, sur la Figure IV.6, que les déplacements et déformations donnent des résultats stables quel que soit le nombre d'éléments du maillage, tandis que les contraintes ne sont stables qu'à partir de 12 éléments, avec des valeurs non nulles pour des nombres d'éléments faibles. Toutefois ces valeurs, par ailleurs censées être toutes nulles, varient du dixième au



millième de Méga Pascal ce qui laisse supposer qu'il s'agit d'un artéfact numérique indépendant du nombre d'éléments.



$\max|U_{R,Z}|$  : valeur absolue maximale du déplacement dans les directions radiale et axiale respectivement,  
 $\max|E_{PRR}|, \max|E_{PZZ}|, \max|E_{PTT}|$  : valeur absolue maximale de la déformation dans les directions radiale, axiale et transversale,  
 $\max|S_{MRR}|, \max|S_{MZZ}|, \max|S_{MTT}|$  : valeur absolue maximale de la contrainte dans les directions radiale, axiale et transversale.

Figure IV.6 : Dépendance au maillage en gonflement libre

La figure ci-après permet de comparer les résultats obtenus en utilisant les fonctions poids que nous avons proposées (avec une valeur  $\sigma_u = -5\text{MPa}$ ) et la cinétique de RAG présentée plus haut.

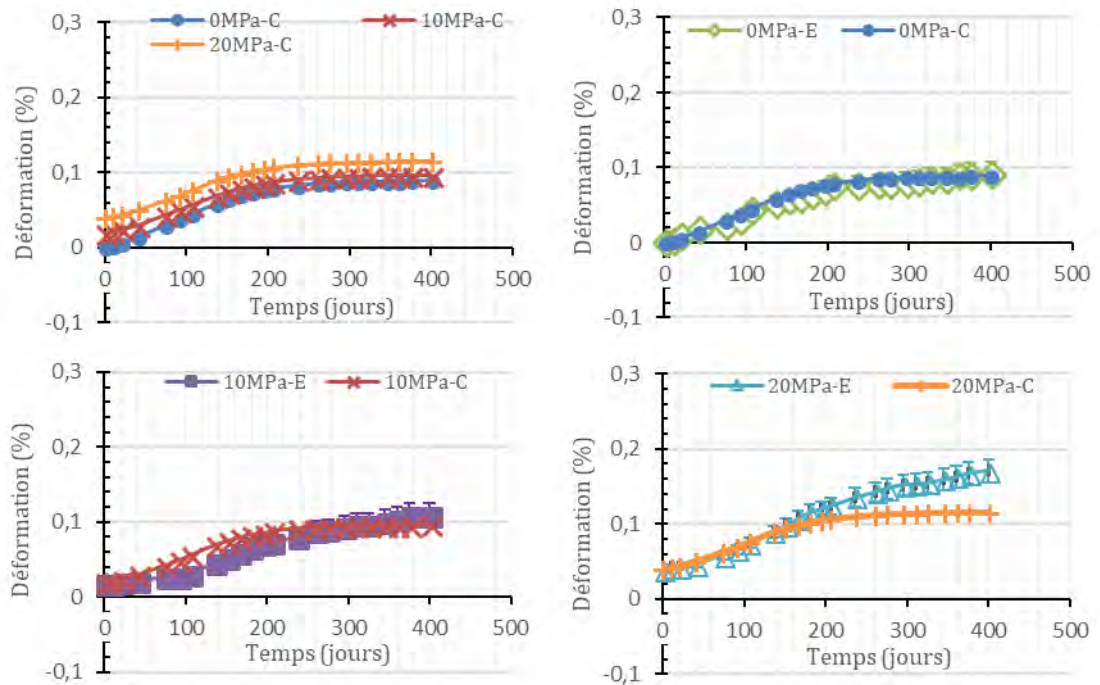


Figure IV.7 : Déformations transversales expérimentales et calculées sous chargements uniaxiaux (0, 10, 20 MPa)

Il convient de noter que nous avons décalé les courbes expérimentales vers le haut de la valeur de la déformation initiale inhérente au chargement, qui n'a pas été prise en compte par [Multon 2003], avant de les comparer aux courbes obtenues par calcul sous Cast3M. On observe sur la première sous-figure ci-dessus que : plus la contrainte de compression axiale est élevée, plus la déformation transversale l'est aussi. Dans l'ensemble les résultats numériques corroborent les résultats expérimentaux. Dans le cas d'un chargement de 20 MPa, on observe que la déformation latérale expérimentale ne cesse d'augmenter dans le temps jusqu'à 400 jours alors que la déformation calculée cesse de croître à partir de 200 jours, comme dans le cas de la déformation expérimentale sans chargement. On pourrait attribuer cet effet au fluage du matériau qui n'est pris en compte dans la modélisation.

#### IV.4.2.2 Epreuve frettée avec un anneau en acier d'épaisseur 3 puis 5mm

Dans cette configuration l'éprouvette en béton soumise à la RAG est frettée par un anneau en acier de 3mm ou de 5 mm d'épaisseur, qui conduit à produire une contrainte de confinement radiale, croissant avec l'épaisseur de l'anneau.

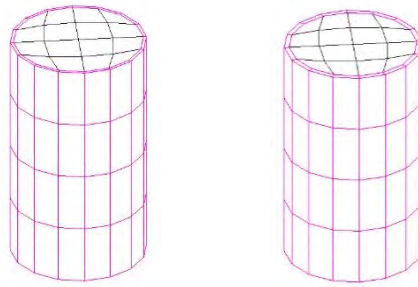
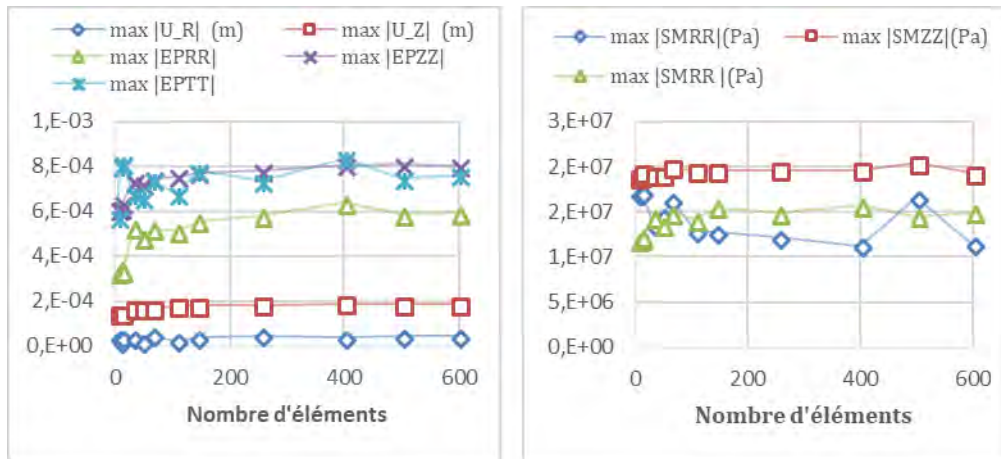


Figure IV.8 : Cas de frettings étudiés (3 et 5mm)

Pour ces calculs, nous avons été contraints d'opérer de façon tridimensionnelle, du fait de la condition de contact unilatérale à l'interface acier béton en axisymétrie. La réalisation de cette condition de contact requiert la division de la surface latérale en quatre parties, en fonction des signes de  $x$  et  $y$ , et l'utilisation du code Cast3M en Annexe D.

La figure ci-après représente les résultats obtenus en faisant varier le nombre de nœuds pour le calcul tridimensionnel de la configuration 0MPa-3mm.

Nous constatons, sur la figure ci-après, que les déplacements, déformations, et contraintes donnent des résultats stables quel que soit le nombre d'éléments du maillage.



$\max|U_{R,Z}|$  : valeur absolue maximale du déplacement dans les directions radiale et axiale respectivement,  
 $\max|E_{PRR}|$ ,  $\max|E_{PZZ}|$ ,  $\max|E_{PTT}|$  : valeur absolue maximale de la déformation dans les directions radiale, axiale et transversale,  
 $\max|S_{MRR}|$ ,  $\max|S_{MZZ}|$ ,  $\max|S_{MTT}|$  : valeur absolue maximale de la contrainte dans les directions radiale, axiale et transversale.

Figure IV.9 : Dépendance au maillage de la configuration 0MPa-3mm

La figure ci-après permet de confronter les résultats obtenus par calculs, avec 256 éléments dans le maillage, aux résultats expérimentaux.

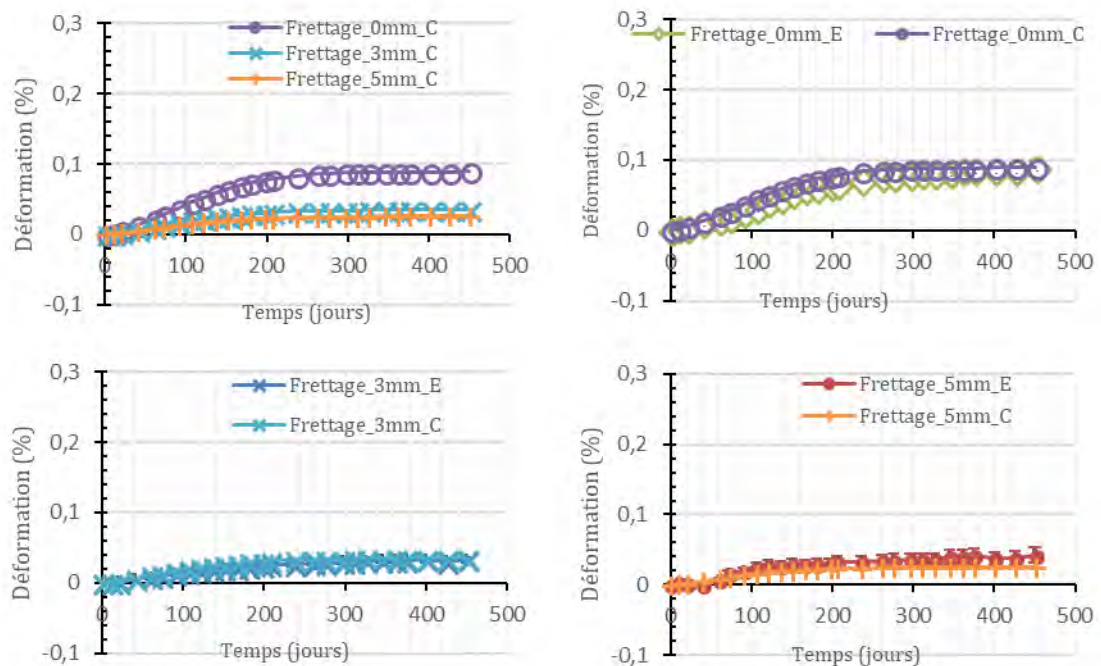


Figure IV.10 : Déformations transversales expérimentales et calculées sous frettage (3 et 5mm)

La réduction des déformations transversales (ainsi que celle des déformations radiales qui ne font pas partie des données expérimentales disponibles) avec l'efficacité du frettage est, de façon cohérente, bien visible sur la courbe IV.9.a où les déformations transversales sont d'autant plus faibles que l'anneau est épais, même si le passage d'une épaisseur de 3 mm à une épaisseur de 5 mm ne modifie pas significativement les résultats. Le gonflement est reporté dans la direction longitudinale (voir figure suivante). Les autres sous-figures montrent une bonne corrélation entre

les calculs et l'expérience, à l'exception du frettage à 5mm. En effet, pour ce dernier, des problèmes métrologiques ont été signalé par [Multon 2003].

La figure ci-après représente les résultats des déformations longitudinales.

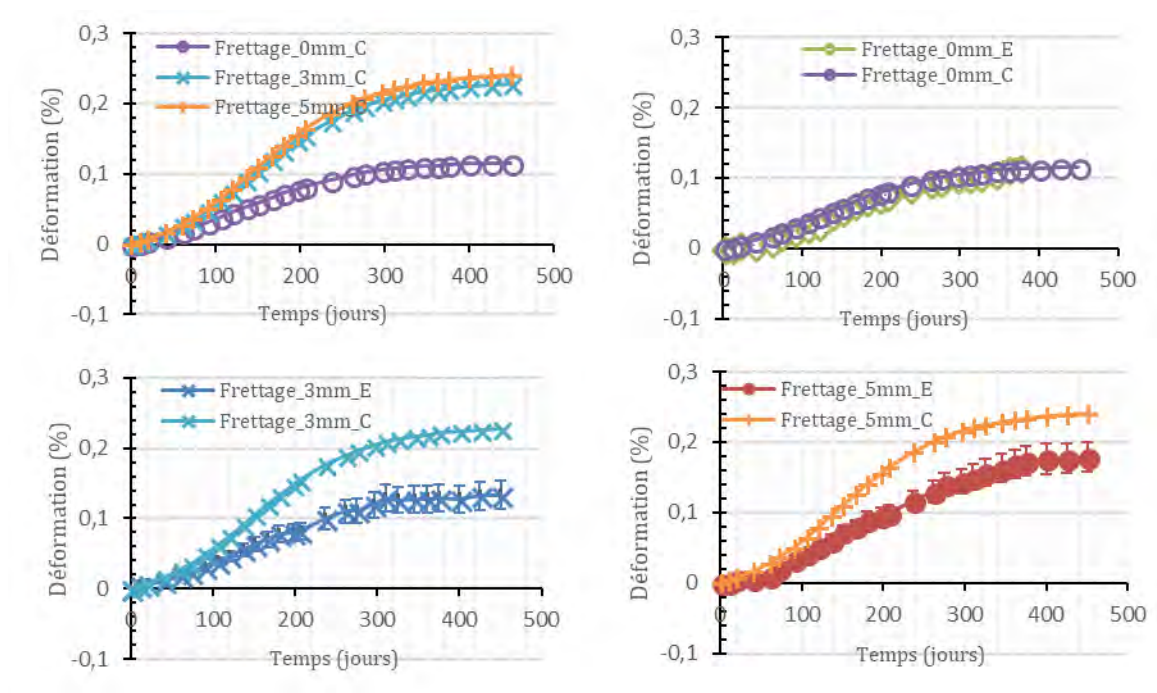


Figure IV.11 : Déformations longitudinales expérimentales et calculées sous frettage (3 et 5mm)

Les déformations longitudinales calculées sont d'autant plus élevées que le frettage est important. Cependant, elles sont largement supérieures aux valeurs expérimentales. Cela peut être dû au fait que le frottement, qui devrait réduire les déformations suivant  $z$  (longitudinale), n'a pas été pris en compte dans la définition de l'interface acier/béton. Nous avons considéré un contact unilatéral sans frottement.

La figure suivante représente les courbes expérimentales des contraintes de confinement, obtenues en mesurant le déplacement radial sur les génératrices extérieures de l'anneau, et en utilisant la formule [Multon 2003] :

$$\sigma_{conf} = 2 \cdot G_a \left( \frac{K_a + \frac{1}{3} G_a}{K_a + \frac{4}{3} G_a} \right) \left( \frac{1}{R_e} - \frac{R_e}{R_i^2} \right) u_r^{mes} \quad \text{Eqn IV.20}$$

avec :  $K_a = \frac{E_a}{3 \cdot (1 - 2\nu_a)}$  et  $G_a = \frac{E_a}{2 \cdot (1 + \nu_a)}$



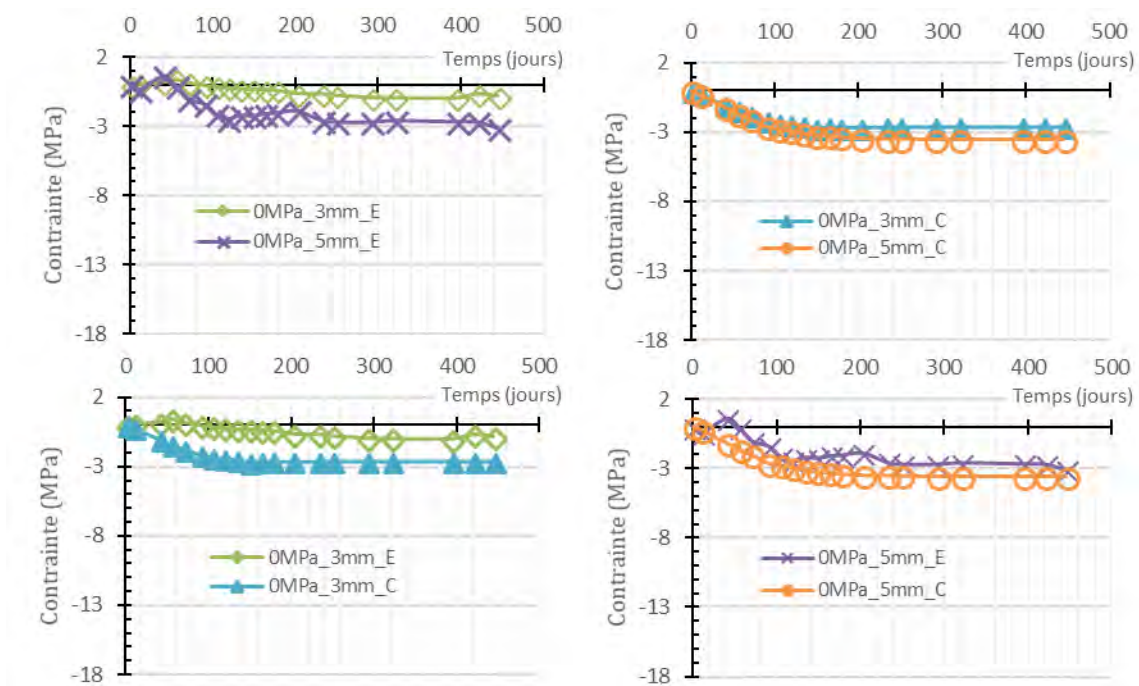


Figure IV.12 : Contraintes de confinement expérimentales et calculées sous frettage (3 et 5mm)

Nous constatons que plus le frettage augmente, plus les contraintes de confinement augmentent. Il y a une bonne corroboration entre les valeurs calculées et les valeurs expérimentales pour le frettage à 5mm, l'écart étant plus grand à 3mm. Nous devons préciser que des problèmes métrologiques ont aussi été signalés ici.

#### IV.4.2.3 Epreuve frettée avec un anneau en acier de 3 et 5mm et comprimée à 10MPa

Nous avons ensuite les combinaisons des deux cas précédents, soit un frettage avec un anneau de 3 mm ou de 5 mm d'épaisseur et une compression axiale de 10MPa dans chaque cas (voir Figure IV.13).

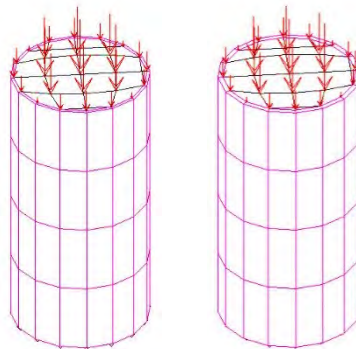


Figure IV.13 : Epreuve frettée (3 et 5mm) et comprimée à 10MPa

Pour cette configuration, les courbes expérimentales des contraintes de confinement ont été obtenues en mesurant le déplacement radial sur les génératrices extérieures de l'anneau, et en utilisant l'équation Eqn IV.20.

Les résultats obtenus ont été présentés sur la figure ci-après.

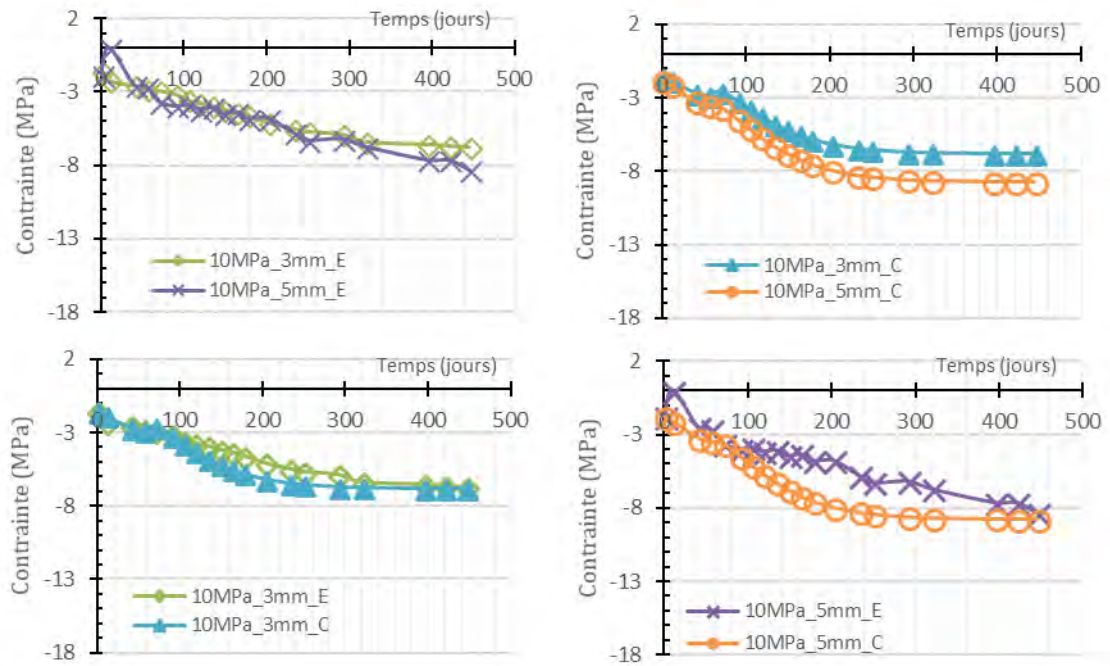


Figure IV.14: Contraintes de confinement expérimentales et calculées sous frettage (3 et 5mm) et compression de 10MPa

Nous constatons bien que pour une pression de 10MPa constante, la contrainte de confinement est d'autant plus élevée que l'anneau de frettage est épais. L'écart entre les courbes calculées et les courbes expérimentales peut-être dû aux erreurs métrologiques expérimentales d'une part, mais aussi aux hypothèses de calculs concernant l'interface acier/béton (absence de frottement).

#### IV.4.2.4 Eprouvette frettée avec un anneau en acier de 3 et 5mm et comprimée à 20MPa

Nous avons ensuite les combinaisons des deux cas précédents, soit un frettage avec un anneau de 3 mm ou de 5 mm d'épaisseur et une compression axiale de 20MPa dans chaque cas (voir Figure IV.15).

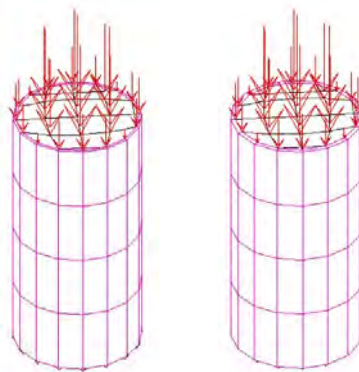


Figure IV.15 : Eprouvette frettée (3 et 5mm) et comprimée à 20MPa

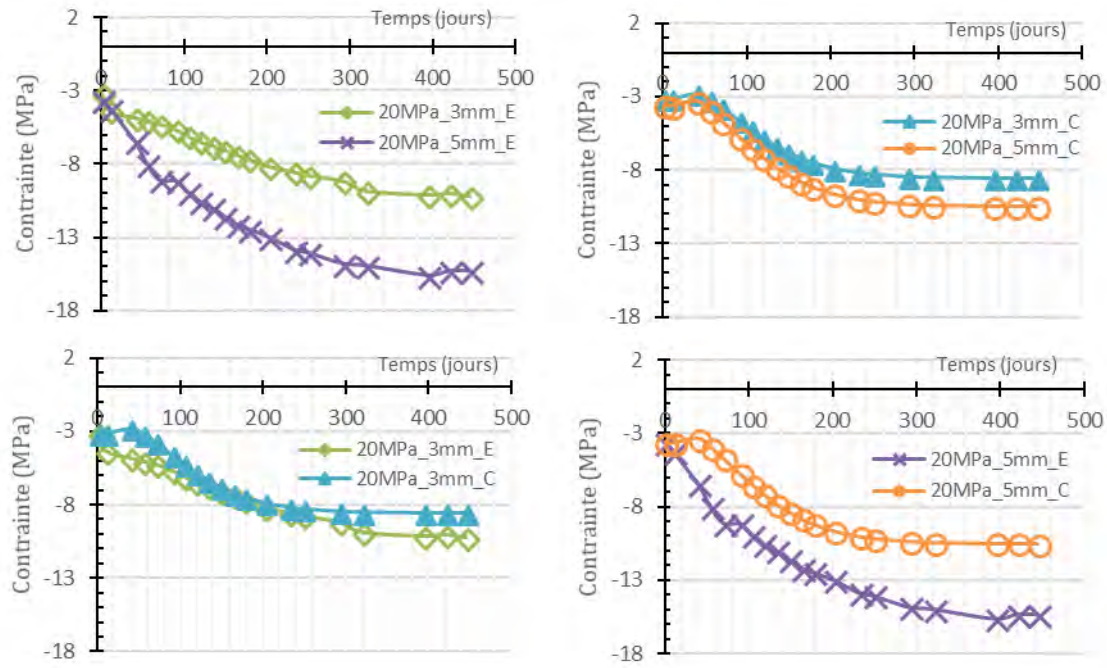


Figure IV.16 : Contraintes de confinement expérimentales et calculées sous frettage (3 et 5mm) et compression de 20MPa

Nous constatons bien que pour une pression de 20MPa constante, la contrainte de confinement est d'autant plus élevée que l'anneau de frettage est épais. L'écart entre les courbes calculées et les courbes expérimentales peut-être dû aux erreurs métrologiques expérimentales d'une part, mais aussi aux hypothèses de calculs concernant l'interface acier/béton (absence de frottement).

#### IV.5 Synthèse

Dans ce chapitre, une synthèse bibliographique de quelques études menées sur la RAG sous chargement, permet de tirer deux enseignements. Premièrement, les diverses expériences menées pour étudier la RAG sous chargement font apparaître un niveau de contrainte ( $\sigma_u$ ) à partir duquel le gonflement est annulé dans une direction. La valeur de  $\sigma_u$  varie globalement de -11MPa à -0,11 MPa selon les auteurs. Deuxièmement, un report du gonflement plus ou moins important dans les autres directions, selon leur état de contrainte est généralement observé.

[Charpin 2013, Charpin & Ehrlacher 2014b] et [Morenon *et al.* 2017] proposent des modélisations de la RAG qui intègre l'anisotropie. Cependant, cette intégration est intimement liée aux hypothèses de modélisations de la RAG dans le béton considéré par ces derniers. [Charpin 2013, Charpin & Ehrlacher 2014b] utilisent une description micromécanique du béton pour calculer les propriétés mécaniques et les déformations en fonction de l'état de fissuration, et un critère énergétique de fissuration de façon à faire évoluer l'état de fissuration. [Morenon *et al.* 2017] s'appuient sur la pression induite par le gel pour rendre compte du gonflement anisotrope. Le choix du modèle de RAG de [Multon *et al.* 2009] effectué au chapitre 1, impliquant de déterminer



les effets de la RAG à travers le gonflement volumique, ne permet pas de se servir des deux propositions précédentes. *A contrario*, des fonctions poids ont été proposées par [Saouma & Perotti 2006] pour la répartition d'un gonflement volumique de RAG, ce qui conviendrait pour la prise en compte de l'anisotropie dans notre cas. Cependant, elles ne sont pas suffisamment explicites et impliquent trois étapes, dont une interpolation linéaire et une autre bilinéaire. De plus, elles ne tiennent pas compte du fait que les contraintes principales sont toujours classées par ordre, ce qui devrait permettre de réduire le nombre de cas possible. C'est la raison pour laquelle, nous avons proposé de nouvelles expressions de fonction poids pour faire le calcul en une seule étape, avec des expressions précises.

Les expressions des fonctions poids proposées ont été validées par comparaison des résultats obtenus après implémentation dans Cast3M, aux valeurs (déplacements, déformations, contraintes) obtenues expérimentalement par [Multon 2003, Multon *et al.* 2005], sur éprouvettes en béton atteint de RAG pressées axialement et/ou confinées par anneaux en acier. Il est intéressant de noter que la proximité des résultats obtenus aux valeurs expérimentales, avec un modèle rhéologique élastique linéaire pour le béton, est du même ordre que celle démontrée par [Morenon *et al.* 2017] dans le cas d'un modèle rhéologique complet incluant le fluage, le retrait et l'endommagement du béton. Il est clair que ce constat n'est pas généralisable, et que la modélisation proposée ne reste valable que dans un domaine limité à l'absence d'effets non linéaires de comportement du béton, hormis le gonflement de RAG. De plus, les fonctions poids donnent des résultats peu réalistes quand les contraintes principales de compression sont suffisamment élevées pour générer de la fissuration. Dans la proposition de [Saouma & Perotti 2006], sous les mêmes conditions il n'y a pratiquement plus de gonflement, tandis que dans notre cas, nous retournons au gonflement libre, ce qui surévalue de manière conservative les effets du gonflement.

La validation à l'échelle de l'éprouvette étant effective, le cinquième chapitre, portera sur la réalisation d'une série de calculs déterministes, sous Cast3M, d'une pile d'évacuateur de crue du barrage de Song Loulou sujette à la RAG et aux sollicitations mécaniques, permettant de construire des modèles de substitution à l'échelle de la pile, en vue d'une analyse fiabiliste.



## CHAPITRE V

### Calcul de la probabilité de blocage de la vanne d'une passe d'évacuateur de crue du barrage de Song Loulou



<b>V.1</b>	<b>INTRODUCTION .....</b>	<b>138</b>
<b>V.2</b>	<b>CADRE GÉNÉRAL D'UNE ANALYSE FIABILISTE.....</b>	<b>139</b>
V.2.1	DENSITÉS DE PROBABILITÉ USUELLES EN FONCTION DU TYPE DE DONNÉES .....	140
V.2.2	TRANSFORMATIONS ISOPROBABILISTES .....	141
<b>V.3</b>	<b>MÉTHODES POUR L'ANALYSE FIABILISTE .....</b>	<b>143</b>
V.3.1	MÉTHODES FORM/SORM .....	143
V.3.2	MÉTHODES DE SIMULATION.....	147
V.3.3	SYNTHÈSE .....	149
<b>V.4</b>	<b>OUVRAGES EN BÉTON DE LA CENTRALE HYDROÉLECTRIQUE DE SONG LOULOU ATTEINTS DE RAG ..</b>	<b>150</b>
V.4.1	PRÉSENTATION DE L'AMÉNAGEMENT HYDROÉLECTRIQUE DE SONG LOULOU .....	150
V.4.2	JUSTIFICATION DU CHOIX DE L'ÉVACUATEUR DE CRUES .....	151
V.4.3	DONNÉES DE MODÉLISATION DE L'ÉVACUATEUR DE CRUES .....	151
<b>V.5</b>	<b>ANALYSE FIABILISTE DU BLOCAGE D'UNE VANNE D'ÉVACUATEUR DE CRUES .....</b>	<b>154</b>
V.5.1	MÉTHODOLOGIE MULTI-ÉCHELLE .....	154
V.5.2	FORMULATION DES MODES DE DÉFAILLANCE DE L'ÉVACUATEUR DE CRUES.....	155
V.5.3	CONSTRUCTION DES MODÈLES DE SUBSTITUTION DES DÉPLACEMENTS MAXIMUM.....	158
V.5.4	ANALYSE FIABILISTE.....	165
<b>V.6</b>	<b>SYNTHÈSE .....</b>	<b>171</b>

## V.1 Introduction

Parmi les défaillances fonctionnelles possibles d'un barrage, celle du blocage des évacuateurs de crues peut s'avérer critique et être suivie de conséquences désastreuses. Malgré son importance, cette défaillance n'a fait jusqu'à présent l'objet que de très peu d'investigations soutenues en analyse de fiabilité. Les travaux de [Patev *et al.* 2005, Kalantarnia 2013], abordent la fiabilité des évacuateurs de crues de manière globale sans s'appesantir sur les problèmes fonctionnels liés au comportement des piles en béton. Les défaillances abordées dans l'analyse de fiabilité des barrages ont davantage concerné le comportement mécanique du corps des barrages [de Araújo & Awruch 1998, Carvajal 2009, Altarejos-García *et al.* 2012, Kartal *et al.* 2012, Westberg Wilde & Johansson 2012, Shi *et al.* 2016] et/ou du contexte géotechnique [Jeon *et al.* 2009, Hariri-Ardebili & Pourkamali-Anaraki 2018a, b], sous diverses situations (séismes, inondations, mise en eaux, etc.). Dans notre travail, nous nous sommes focalisés sur la seule défaillance fonctionnelle du blocage des vannes, sous l'hypothèse d'un réservoir plein mais hors situation de crue (avec possibilité de surverse). Ce choix est limitatif et reste conservatif. En effet les conséquences du blocage sont en l'occurrence minimales car la manœuvre d'ouverture des vannes n'intervient qu'en situation de crue. Une analyse plus complète aurait donc nécessité de combiner le blocage des vannes avec la survenue d'une crue et possiblement des pertes d'intégrité d'équilibre ou structurale de l'ouvrage. Ce sera une des perspectives à donner à notre travail.

Les chapitres précédents ont permis de construire un modèle de substitution pour suppléer le modèle microscopique du LMDC pour l'évaluation du gonflement volumique dans le calcul de structures en béton atteintes de RAG. Il s'agit d'une sigmoïde, comme dans les modèles macroscopiques de RAG, mais dont les trois paramètres  $\varepsilon_{Vmax}$ ,  $\tau_C$ , et  $\tau_L$ , sont fonctions, tant de données matériaux du béton (dimension des granulats, concentration en granulats du béton, porosité du mortier), que de variables gouvernant la physico-chimie de la RAG (Concentration initiale en alcalin, distance sur laquelle le gel peut migrer initialement, volume molaire du gel, nombre de mole d'alcalin réagissant avec une mole de silice pour former une mole de gel, coefficient de fixation des alcalins). Cela, permet d'associer l'efficacité de calcul des modèles macroscopiques à la précision des modèles microscopiques. L'utilisation de ce modèle de substitution en présence de contraintes anisotropes requiert l'utilisation de fonction poids pour une répartition adéquate du gonflement volumique dans les trois directions principales. Des expressions de fonctions poids, dépendantes des contraintes principales et de la pression maximale que le gel peut exercer, ont été proposées et validées sur des résultats expérimentaux, dans le chapitre IV. Ainsi, c'est avec sérénité que nous abordons ce chapitre, dont les objectifs sont de construire des modèles de substitution du déplacement maximal au niveau de la console et de celui au niveau de la rainure d'une vanne de l'évacuateur de crue de Song Loulou, puis d'effectuer

une analyse de fiabilité du blocage d'une vanne dû à la RAG. Le chapitre commence par une revue bibliographique du cadre et des méthodes d'une analyse fiabiliste. Ensuite, l'aménagement hydroélectrique de Song Loulou est présenté, le choix de l'évacuateur de crue pour l'analyse de fiabilité justifié, le cadre et les résultats de la construction de modèles de substitution des déplacements (induits par le chargement mécanique et la RAG d'une pile) commentés. L'articulation suivante donnera les détails de l'analyse fiabiliste du blocage d'une vanne d'évacuateur de crues.

## V.2 Cadre général d'une analyse fiabiliste

L'utilisation des infrastructures (ponts, centrales nucléaires, barrages, etc.) et structures (avions, bateaux, trains, etc.) sensibles doit se faire en toute quiétude, c'est-à-dire avec un risque d'incidents et d'accidents réduit et maîtrisé. Pour ce faire, il est nécessaire de prendre en compte les divers aléas pouvant conduire à une situation non désirée. Les incertitudes que portent ces aléas peuvent avoir diverses origines : intrinsèques (paramètres environnementaux, variabilité spatiale ou temporelle des propriétés des matériaux, etc.), épistémiques (modélisation des phénomènes physiques en jeu, etc.), numériques (méthodes, moyens de calculs, etc.), organisationnelles (Erreurs humaines, etc.). Certaines d'entre elles peuvent être réduites par l'utilisation de techniques et moyens adaptés (numériques, ontologiques), ou par l'amélioration des connaissances (épistémiques), mais d'autres ne peuvent être que quantifiées. Pour garantir la sûreté des structures (par une conception robuste [Chateauneuf & Aoues 2008, Aoues & Chateauneuf 2010] et un suivi adéquat en exploitation [Curt *et al.* 2011, Curt *et al.* 2017]) en tenant compte des aléas, on utilise soit l'approche déterministe (coefficients de « sécurité » globaux), soit l'approche semi-probabiliste (coefficients de « sécurité » partiels), ou alors l'approche probabiliste (probabilités de défaillance, indices de fiabilité, etc.). Toutes ces approches requièrent l'utilisation d'un modèle caractérisant le comportement des structures. L'approche probabiliste regroupe trois catégories de méthodes que sont les méthodes d'analyse de tendance centrale dont le but est de déterminer les caractéristiques statistiques (moments statistiques et densité de probabilité) de la réponse mécanique, les méthodes d'analyse de sensibilité qui permettent de quantifier la part de l'aléa associé à chaque paramètre d'entrée sur la variance de la réponse, et les méthodes fiabilistes qui visent l'évaluation de la probabilité de défaillance vis-à-vis d'un scénario donné.

Les paramètres qui ont une influence sur le comportement des structures (propriétés géométrique et matériau, chargements, lois de comportement, etc.) sont dans bien des cas entachés d'incertitudes. Lorsque ces incertitudes sont très fortes, il est nécessaire de tenir compte de leur propagation dans les modèles de comportement des structures pour évaluer leur performance. Cela est fait au moyen de l'analyse fiabiliste dont le cadre général est présenté sur la [Figure V.1](#). La première étape d'une analyse fiabiliste consiste à déterminer les densités de probabilités marginales des paramètres d'entrée aléatoires :  $X_1, \dots, X_n$  ([Figure V.1A](#)). Elles sont obtenues soit par étude statistique (mesures et/ou retour d'expérience), soit par jugement

d'expert. En propageant la variabilité de ces paramètres dans le modèle de comportement de la structure, on obtient une réponse stochastique de cette dernière qui combinée à un seuil constitue la fonction d'état limite notée  $g$ . Ensuite, pour un scénario de défaillance de fonction d'état limite  $g$ , on calcule la probabilité de défaillance  $P_f$  recherchée à travers la densité jointe des variables aléatoires  $f_{X_1 \dots X_n}(X_1 \dots X_n)$  (Figure V.1B). Cependant, pour simplifier les calculs, il peut être nécessaire d'opérer le passage de l'espace physique à l'espace normal centré réduit (espace standardisé) par transformation isoprobabiliste (application bijective permettant de substituer la métrique de l'espace physique par une métrique euclidienne, tout en conservant la valeur de la probabilité en chacun des points de cet espace). Les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$ , qui suivent *a priori* une loi quelconque et qui sont *a priori* corrélées, sont alors transformées en variables gaussiennes centrées réduites  $U_1, \dots, U_n$  (Figure V.1A'). La densité jointe  $f_{U_1 \dots U_n}(U_1 \dots U_n)$  ainsi obtenue présente des propriétés géométriques qui facilitent le calcul de la probabilité de défaillance  $P_f$  via l'indice de fiabilité  $\beta$  (distance minimale entre l'origine de l'espace standardisé et la surface d'état limite  $g=0$ ).

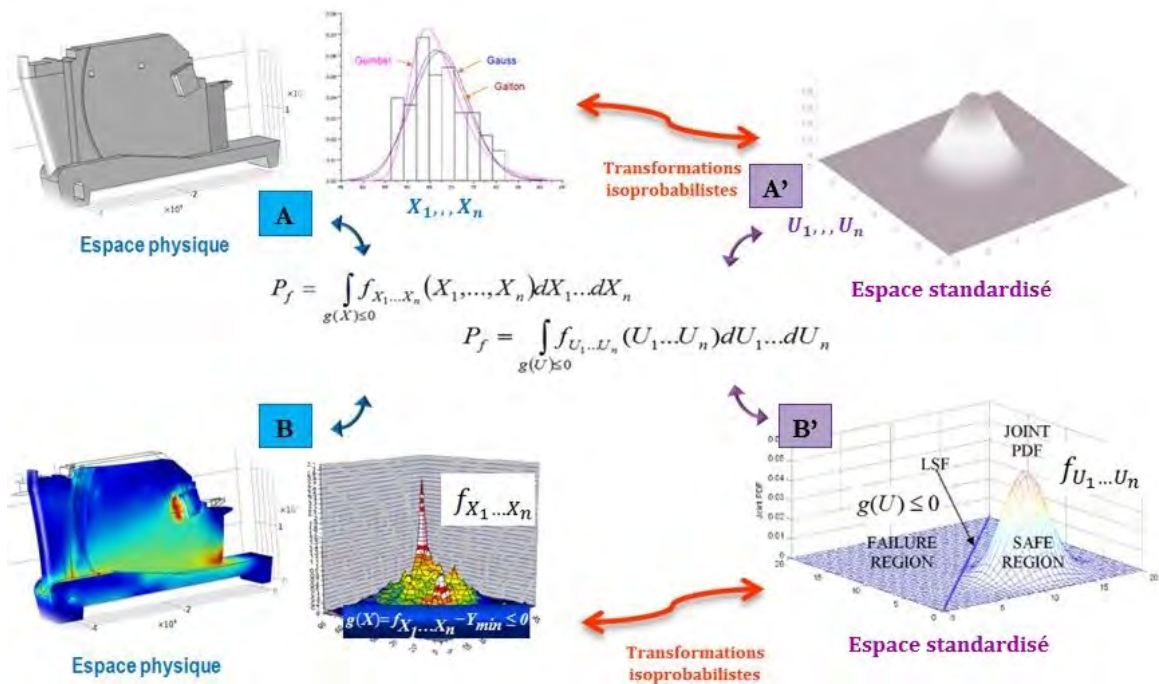


Figure V.1: Cadre général d'une analyse fiabiliste

### V.2.1 Densités de probabilité usuelles en fonction du type de données

L'étude statistique de données provenant principalement du retour d'expérience, donne des indications pour le choix de lois de probabilités en fonction de la nature de la variable aléatoire. Elles sont regroupées dans le tableau ci-après, inspiré de [Duprat 2013], pour des variables

aléatoires concernant les propriétés matériaux, les paramètres géométriques, les chargements, ainsi que les conditions d'exposition d'ouvrages.

Tableau V.1 : Lois de probabilités usuelles en fonction des usages ([Duprat 2013])

Variables aléatoires	Lois de probabilités	Domaine de définition
Propriétés matériaux : - Résistance, module d'Young, etc. - Diffusivité, etc.	Normale, Lognormale, Gamma, Weibull, Uniform	$x > 0$
Paramètres géométriques : - Dimensions, - Tailles de sections droites, - Surfaces, etc.	Normale tronquée, Lognormale tronquée, Béta, Uniform	$a < x < b$
Chargements : - Climatique (neige, vent, etc.) - Environnement (vagues, etc.) - Tellurique (sismique, etc.) - Sol (bâtiments, etc.) - Trafic (Ponts, etc.) - Accidentel (explosion, etc.)	Normale tronquée, Gumbel max, Fréchet max, Weibull	$x > 0$ $x > a$
Poids propre	Normale tronquée	$x > 0$
Conditions d'exposition : - Humidité relative, - Pression de polluants, - Concentration de polluants.	Normale tronquée, Béta	$a < x < b$

### V.2.2 Transformations isoprobabilistes

Lorsque les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes, la transformation vers l'espace normal centré réduit est directe et consiste en un changement de variables, variable par variable. A contrario, si elles sont dépendantes, on utilise la transformation de [Rosenblatt 1952] lorsque la fonction de distribution conjointe  $F_{X_1, \dots, X_n}(X_1 \dots X_n)$  est connue. Quand elle n'est pas connue (ce qui est souvent le cas en pratique), mais qu'on connaît les densités marginales ainsi que la matrice des coefficients de corrélation  $\rho_{ij}$ , on utilise la transformation de [Nataf 1962]. Une proposition de généralisation de cette transformation s'appuyant sur l'utilisation de copules elliptiques a été faite pour des cas où l'on souhaiterait travailler dans un espace centré réduit autre que l'espace normal pour améliorer l'estimation de la probabilité  $P_f$  lorsqu'elle est très faible [Lebrun & Dutfoy 2009]. Notons également l'existence de la transformation isoprobabiliste par polynômes d'Hermite qui en plus des moments statistique d'ordre 1 (espérance) et 2 (variance) utilisés par les transformations précédentes, prend en compte les moments d'ordre 3 (asymétrie) et 4 (aplatissement) incluant la corrélation entre les variables [Ditlevsen & Madsen 1996] [Lemaire *et al.* 2005]. Cette dernière, ainsi que les transformations directes, ne sont pas présentées ici.



### V.2.2.1 Transformation de Rosenblatt

Elle permet d'opérer une transformation marginale des variables de l'espace standardisé vers l'espace physique. La transformation de Rosenblatt, notée  $U = T(X)$ , n'est applicable que si la densité conjointe de toutes les variables aléatoires est connue. Elle est détaillée dans [Lemaire *et al.* 2005]. Son principe réside dans l'hypothèse que la distribution multivariable  $F_{X_1 \dots X_n}(X_1 \dots X_n)$  est équivalente à  $F_{X_1}(X_1)F_{X_2|X_1}(X_2|X_1) \dots F_{X_n|X_1, \dots, X_{n-1}}(X_n|X_1, \dots, X_{n-1})$ .

La transformation de Rosenblatt est donnée par :

$$\begin{cases} X_1 = F_1^{-1}(\Phi(U_1)), \\ X_2 = F_2^{-1}(\Phi(U_2|U_1)), \\ \vdots \\ X_n = F_n^{-1}(\Phi(U_n|U_{n-1}, \dots, U_1)) \end{cases} \quad \text{Eqn V.1}$$

où  $\Phi$  représente la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, et la transformation inverse par :

$$\begin{cases} U_1 = \Phi^{-1}(F_1(X_1)), \\ U_2 = \Phi^{-1}(F_2(X_2|X_1)), \\ \vdots \\ U_n = \Phi^{-1}(F_n(X_n|X_{n-1}, \dots, X_1)) \end{cases} \quad \text{Eqn V.2}$$

Dans la pratique, la difficulté majeure dans l'application de cette transformation réside dans la détermination des probabilités conditionnelles. De plus, la densité conjointe des variables physiques n'est pas toujours connue.

### V.2.2.2 Transformation de Nataf

La transformation de [Nataf 1962] ne requiert pas la connaissance de la densité conjointe des variables physiques. En revanche, leurs densités marginales ainsi que la matrice de corrélation  $\rho_{ij}$  sont connues. Elle est détaillée dans [Lemaire *et al.* 2005]. Son principe consiste à considérer une suite des variables centrées réduites  $U = (U_1 \dots U_n)^t$ , issues de la transformation  $U_i = \Phi^{-1}(F_{X_i}(X_i))$ . Les variables  $U$  ne sont pas décorrélées, mais leur corrélation est *a priori* différente de la corrélation des variables physiques  $X$ . Les corrélations  $\rho_{ij}^*$  des variables  $U$  sont solutions de l'équation intégrale (dans laquelle  $\Phi_2$  représente la densité de la loi binormale) :

$$\rho_{ij} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} \frac{X_j - \mu_j}{\sigma_j} \Phi_2(U_i, U_j, \rho_{ij}^*) dU_i dU_j \quad \text{Eqn V.3}$$

Dans la pratique, des relations empiriques fournissant des estimations acceptables des corrélations des variables intermédiaires sont utilisées [Lemaire *et al.* 2005]. La matrice de décorrélation des variables physiques est alors construite à partir de la matrice de corrélation des

variables normales en considérant sa décomposition spectrale, ou encore sa décomposition de Cholesky [Robert E. Melchers 2018].

### V.2.2.3 Transformation de Nataf généralisée à l'aide de copules

De manière simpliste [Rousouly 2011], on peut dire qu'une copule, notée  $C$ , est une fonction de  $[0,1]^n$  dans  $[0,1]$  qui définit la structure de dépendance entre une fonction de répartition conjointe  $F_{X_1 \dots X_n}(X_1 \dots X_n)$  et les fonctions de répartition marginales  $F_{X_i}(X_i)$ , telle que :

$$F_{X_1 \dots X_n}(X_1 \dots X_n) = C(F_{X_1}(X_1), \dots, F_{X_n}(X_n)) \quad \text{Eqn V.4}$$

Lors de la transformation de Nataf usuelle, on choisit en fait implicitement une copule gaussienne pour  $(X_1 \dots X_n)$ . Ceci peut éventuellement affecter la précision de l'estimation, par exemple dans le cas d'évaluation d'une probabilité de défaillance très faible pour certaines fonctions marginales.

La transformation de Nataf généralisée [Lebrun & Dutfoy 2009], peut être définie par :

$$U_i = E^{-1}(F_{X_i}(X_i)) \quad \text{Eqn V.5}$$

où  $E$  est la fonction de répartition marginale du représentant standard associé à la copule choisie ( $E = \Phi$  pour une copule gaussienne). Pour plus de détails, le lecteur peut se reporter à [Lebrun 2013].

Dépendant de la nature de la fonction de performance, et de l'espace (physique ou standard) dans lequel est conduit le calcul, diverses méthodes ont été développées pour l'analyse fiabiliste. Elles sont présentées dans le paragraphe suivant.

## V.3 Méthodes pour l'analyse fiabiliste

Bien qu'elles puissent être classées en 4 niveaux (variables aléatoires fixées à leurs valeurs moyennes pour le niveau 1, et prise en compte de paramètres économiques pour le niveau 4), les méthodes FORM/SORM et les méthodes de simulations, sont les seules présentées dans cette section.

### V.3.1 Méthodes FORM/SORM

Les méthodes First Order Reliability Method et Second Order Reliability Method s'utilisent dans l'espace normal centré réduit. Elles consistent tout d'abord à trouver une approximation de la fonction de performance  $g(U)$ , notée  $\tilde{g}(U)$ , par un développement en série de Taylor autour d'un point donné  $P_0$  de coordonnées  $U_0$  :

$$\tilde{g}(U) = g(U_0) + J(U - U_0) + \frac{1}{2}(U - U_0)^t H(U - U_0) + \underset{U \rightarrow U_0}{0} [(U - U_0)^t (U - U_0)] \quad \text{Eqn V.6}$$

où  $J$  et  $H$  représentent respectivement la matrice Jacobienne ainsi que la matrice Hessienne de la fonction d'état limite en  $U_0$ . Si on arrête le développement à l'ordre 1, on utilise la méthode FORM

(surface de défaillance remplacée par un hyperplan, Figure V.2) ; à l'ordre 2 on utilise la méthode SORM (surface de défaillance remplacée par un hyperparaboloïde, Figure V.2).

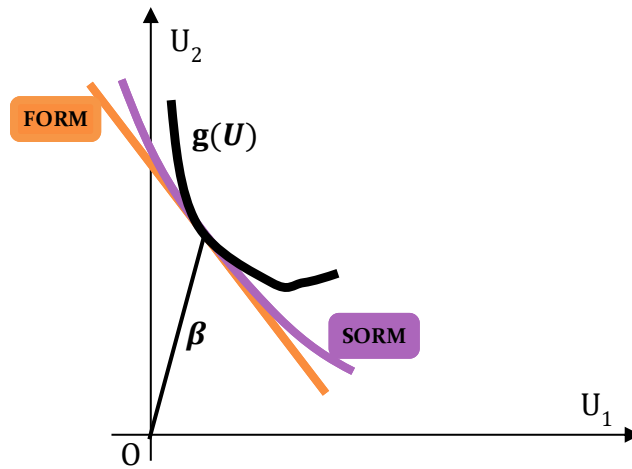


Figure V.2 Méthodes FORM et SORM

Pour permettre l'évaluation de la probabilité de défaillance, le point  $P_0$  doit correspondre au point de la surface de défaillance le plus proche de l'origine de l'espace standardisé. Ce dernier, noté  $P^*$  et de coordonnées  $U^*$ , est appelé point de dimensionnement (ou point de conception). On le détermine en utilisant un algorithme de résolution du problème d'optimisation :

$$\begin{cases} \beta = \min (\sqrt{U^t U}) \\ \text{tel que : } g_U(U) = 0 \end{cases} \quad \text{Eqn V.7}$$

$\beta$  représente l'indice de fiabilité au sens de Hasofer et Lind [Hasofer & Lind 1974]. C'est le plus utilisé dans la pratique en raison de son invariance vis à vis de la formulation de la fonction d'état limite. L'indice de fiabilité est une grandeur scalaire mesure de la fiabilité pour un mode de défaillance donné. En effet, plus cet indice est élevé, plus la probabilité de défaillance sera faible car le point de conception, très éloigné de l'origine de l'espace standardisé, tend à être présent dans les zones de densité très faible appelées queues de distribution. Dans le cas où l'origine est dans le domaine de défaillance, la valeur de l'indice de fiabilité est négative. L'indice de fiabilité est un concept indispensable dans la théorie de la fiabilité, à tel point qu'il est préféré à la probabilité de défaillance dont la valeur est parfois trop faible (de l'ordre de  $10^{-7}$  à  $10^{-5}$ ) pour être conceptuellement représentative. Il est à noter qu'il est également retenu comme mesure de la fiabilité dans la plupart des réglementations modernes de conception des structures.

En fiabilité des structures, l'algorithme de [Rackwitz & Flessler 1978] [Rackwitz 2001] est de loin le plus employé à cause de sa très simple expression, mais aussi pour ses bons résultats en pratique.

### V.3.1.1 Algorithme de Rackwitz-Fiessler

Il s'agit, tout d'abord, de choisir un point de départ *a priori* quelconque. Dans la majorité des cas, l'initialisation aura lieu aux valeurs médianes des variables, autrement dit, à l'origine de l'espace standardisé. Ensuite, le gradient normalisé à la fonction d'état limite est déterminé en ce point. Il permet la détermination des composantes du vecteur normal au plan tangent à la fonction d'état limite en ce point, dirigé vers le domaine de défaillance :

$$\alpha_k = \frac{-\nabla(g_U)(U_k)}{\|\nabla(g_U)(U_k)\|} \quad \text{Eqn V.8}$$

La distance entre l'origine de l'espace standardisé et l'hyperplan est calculée par :

$$\beta_k = \frac{g_U(U_k) - \nabla(g_U)(U_k)U_k}{\|\nabla(g_U)(U_k)\|} \quad \text{Eqn V.9}$$

Le nouveau point peut alors être déterminé par :  $U_{k+1} = -\beta_k \alpha_k$ .

On s'arrête lorsque le critère de convergence est respecté (proximité des deux derniers points et/ou direction du vecteur gradient passant par l'origine de l'espace).

### V.3.1.2 Méthode FORM

Elle nécessite de se limiter à une approximation du premier ordre de la fonction d'état limite au point de dimensionnement en négligeant les termes de second ordre.

L'équation de l'hyperplan tangent au point de dimensionnement est la suivante :

$$\tilde{g}_U(U) = \beta + \sum_{i=1}^n \alpha_i U_i \quad \text{Eqn V.10}$$

Dans ces conditions :  $P_{f_{FORM}} \approx \Phi(-\beta)$ ,  $\Phi$  est la fonction de répartition de la loi gaussienne centrée et réduite,  $\beta$  la distance entre le point de dimensionnement et l'origine (Figure V.3).

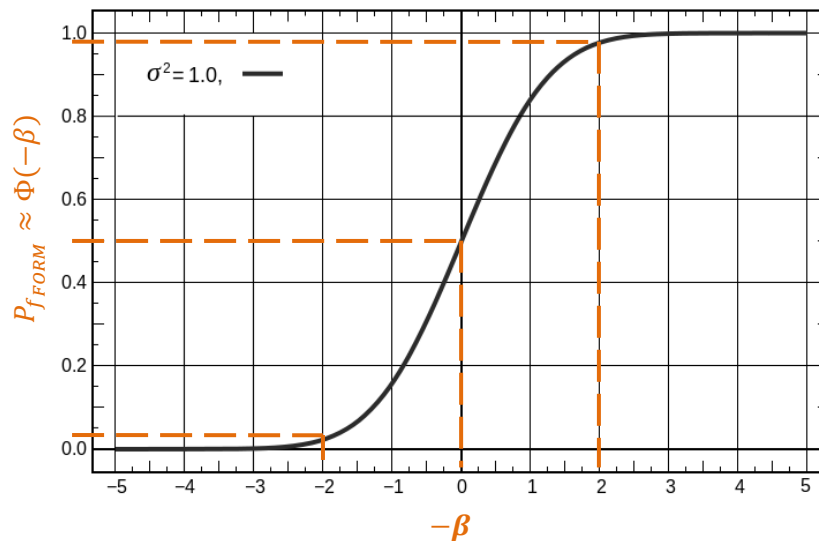


Figure V.3: Illustration de  $P_{f_{FORM}} \approx \Phi(-\beta)$

L'analyse de la [Figure V.3](#) (en croisement avec la [Figure V.2](#)) montre bien que  $\beta$  est positif lorsque l'origine du repère de l'espace standard est dans la zone de sûreté. Dans le cas contraire,  $\beta$  négatif. Dans le cas où l'origine de l'espace standard se trouve sur la surface d'état limite ( $\beta = 0$ ),  $P_{f_{FORM}} \approx 0,5$ .

Dans le cas d'une fonction d'état limite possédant une forte courbure, l'approximation au point de conception par un hyperplan tangent n'est évidemment plus adaptée. Il est alors nécessaire de recourir à une approximation au second ordre.

### V.3.1.3 Méthode SORM

La méthode SORM s'appuie sur une approximation du second ordre de la fonction de performance. La matrice Hessienne (des dérivées secondes) doit être déterminée puis diagonalisée pour que les courbures principales  $\kappa_i$  puissent être calculées. Ces dernières constituent le supplément d'information contenu dans la formulation SORM par rapport à FORM. Autrement dit, une approximation quadratique SORM n'est possible que si les courbures sont évaluables. La résolution du problème aux valeurs propres qui se pose est en général délicate, surtout dans le cas des zones de faibles gradients. L'approximation SORM prend la forme d'un hyperparaboloïde tangent au point de conception, qui a la même courbure en ce point, pouvant s'exprimer par :

$$\tilde{g}_U(U) = U_n - \beta - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \kappa_i U_i^2 \quad \text{Eqn V.11}$$

Avec un tel hyperparaboloïde, la probabilité de défaillance peut être approchée de plusieurs manières. La probabilité de défaillance approchée par [Breitung 1984] :

$$P_{f_{SORMBR}} \approx \Phi(-\beta) \prod_{i=1}^{n-1} (1 + \kappa_i \beta)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{Eqn V.12}$$

[Hohenbichler & Rackwitz 1988] proposent une approximation de probabilité de défaillance plus générale par rapport celle de Breitung. Cette approximation est donnée par :

$$P_{f_{SORMHR}} \approx \Phi(-\beta) \prod_{i=1}^{n-1} \left( 1 + \kappa_i \frac{\varphi(\beta)}{\varphi(-\beta)} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{Eqn V.13}$$

où :  $\frac{\varphi(\beta)}{\varphi(-\beta)} = \beta + \beta^{-1} - 2\beta^{-3} + 10\beta^{-5} - 74\beta^{-7} + 706\beta^{-9} + \dots$

L'approximation de Breitung peut être obtenue par le premier terme de cette dernière équation.

Quand elles sont applicables (faible non-linéarité de  $g$ ), les méthodes FORM/SORM sont préférées car elles sont rapides. Dans le cas contraire, on a recours aux méthodes de niveau 3.

### V.3.2 Méthodes de simulation

Les méthodes de niveau 3 requièrent la possibilité de réaliser des tirages pseudo-aléatoires des variables et d'évaluer la fonction d'état limite un grand nombre de fois.

#### V.3.2.1 Méthode de simulation de Monte Carlo

Basée sur l'application de la loi des grands nombres, la simulation de Monte-Carlo directe est la technique la plus simple pour estimer une espérance ou une intégrale mathématique [Rubinstein & Kroese 2011]. Elle consiste à réaliser un grand nombre de tirages aléatoires, calculer pour chaque tirage la valeur de la fonction d'état limite, et compter le nombre de point appartenant au domaine de défaillance pour en déduire la probabilité de défaillance. Cette méthode peut s'utiliser tant dans l'espace physique que dans l'espace standard. Le principe étant le même, nous présentons ici une application dans l'espace physique (Figure V.4).

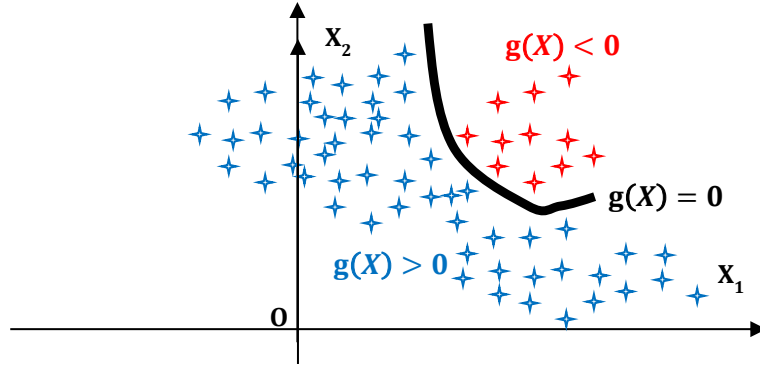


Figure V.4 : Simulation de Monte Carlo dans l'espace physique

L'expression de la probabilité de défaillance devient :

$$P_{fsmc} \approx \frac{1}{N_{sim}} \sum_{k=1}^{N_{sim}} I(g(X) \leq 0) \quad \text{Eqn V.14}$$

où  $f_{X_1 \dots X_n}(X_1 \dots X_n)$  est la densité conjointe de probabilité dans l'espace physique,

$I(g(X) \leq 0)$  est une fonction d'indicateur identifiant le domaine de défaillance qui vaut 1 si  $X$  appartient au domaine de défaillance et 0 sinon,  $N_{sim}$  est le nombre de points aléatoire en lesquels la fonction de d'état limite est évaluée (Taille de l'échantillon).

La variance de l'estimation est égale à [Rubinstein & Kroese 2011] :

$$VAR_{SMC} = \sqrt{\frac{P_{fsmc}(1 - P_{fsmc})}{N_{sim}}} \quad \text{Eqn V.15}$$

Le coefficient de variation est défini comme le quotient de l'écart-type par la moyenne :

$$\frac{VAR_{SMC}}{P_{fsmc}} = \sqrt{\frac{1 - P_{fsmc}}{N_{sim} P_{fsmc}}} \quad \text{Eqn V.16}$$

Pour un intervalle de confiance  $\alpha$ ,

$$N_{sim} \geq \frac{-\ln(1 - \alpha)}{P_f} \quad \text{Eqn V.17}$$

Comme on le constate, les simulations de Monte Carlo nécessitent que la fonction d'état limite soit évaluée un très grand nombre fois pour donner un résultat satisfaisant. Des variations de la méthode de Monte Carlo de base, visant à réduire le nombre de points nécessaires ont été développées. Deux d'entre elles sont présentées dans ce qui suit.

### V.3.2.2 Méthode de simulation stratifiée

La méthode de Monte-Carlo directe effectue une simulation des variables aléatoires de façon indépendante. Un inconvénient de cette méthode est de ne pas assurer la couverture totale de l'espace formé par les  $n$  variables. Les tirages évitent souvent les régions de faibles probabilités que sont les queues de distribution. Pour pallier ce problème, Rubinstein a proposé en 1981 la méthode de simulation stratifiée, qui consiste à diviser le domaine d'intégration  $D$  en plusieurs sous-domaines disjoints (les strates) et à estimer le paramètre sur chacun d'eux [Rubinstein & Kroese 2011], [Melchers 1990].

Le domaine  $D$  est découpé en  $K$  strates disjoints  $D_i$  :

$$D = \bigcup_{i=1}^K D_i \quad (D_i \cap D_j) = \emptyset \quad \text{pour } i \neq j \quad \text{Eqn V.18}$$

Pour chaque strate  $D$ ,  $N_{sim}$  simulations de Monte-Carlo sont effectuées pour estimer la probabilité locale. Il est alors plus facile d'effectuer des tirages dans des régions de faibles probabilités. La probabilité de défaillance devient :

$$P_{fss} = \sum_{i=1}^k \int_{D_i} i(G(U) \leq 0) f_{U_1 \dots U_n}(U_1 \dots U_n) dU_1 \dots dU_n \quad \text{Eqn V.19}$$

L'efficacité de cette méthode par rapport à la méthode de Monte-Carlo directe croît comme le carré du nombre de strates.

### V.3.2.3 Tirages d'importance

Cette méthode consiste à réduire la variance en utilisant une densité de probabilité auxiliaire qui permet de concentrer les tirages dans les domaines les plus importants du point de vue de la défaillance. Pour cela, écrivons  $P_f$  de la façon suivante :

$$P_f = \int_{G(U) \leq 0} \frac{f_{U_1, \dots, U_n}(U_1, \dots, U_n)}{p_{U_1, \dots, U_n}(U_1, \dots, U_n)} p_{U_1, \dots, U_n}(U_1, \dots, U_n) dU_1, \dots, dU_n \quad \text{Eqn V.20}$$

où  $p_{U_1, \dots, U_n}(U_1, \dots, U_n)$  est la densité de tirage.



Donc à partir de  $N_{sim}$  tirages indépendants suivant la densité de tirage, la probabilité de défaillance est estimée par :

$$P_{fTI} = \frac{1}{N_{sim}} \sum_{k=1}^{N_{sim}} \frac{f_{U_1 \dots U_n}(U_1 \dots U_n) dU_1 \dots dU_n}{P_{U_1 \dots U_n}(U_1 \dots U_n) dU_1 \dots dU_n} I(G(U_k) \leq 0) \quad \text{Eqn V.21}$$

sa variance l'est par :

$$VAR_{TI} = \int_{G(U) \leq 0} \frac{f_{U_1 \dots U_n}(U_1, \dots, U_n)}{P_{U_1 \dots U_n}(U_1, \dots, U_n)} dU_1, \dots, dU_n - P_{fTI}^2 \quad \text{Eqn V.22}$$

On constate que la variance de l'estimation dépend fortement de la densité de tirage qui conditionne l'efficacité du tirage d'importance.

### V.3.3 Synthèse

Les méthodes de simulations sont les plus robustes, car elles ne posent pas de problème de convergence et peuvent traiter des fonctions complexes (forte non-linéarité, optimums multiples, fonctions implicites). Cependant, elles sont aussi très gourmandes en temps de calcul compte tenu du grand nombre d'appel à la fonction pour obtenir une réponse précise. C'est d'ailleurs ce défaut qui limite leur champ d'utilisation. On leur préfère les méthodes FORM (lorsque  $g$  est supposée linéaire) et SORM (si une approximation du second ordre est possible et suffisante). La méthode FORM est le plus souvent utilisée pour déterminer le point de défaillance le plus probable, ainsi que les indices de sensibilité et facteurs d'importance de chaque variable. La différence éventuelle entre les probabilités de défaillance obtenues par FORM et par SORM peut être liée à la présence de fortes non-linéarités ou de fortes courbures. Le temps de calcul est indépendant de l'ordre de grandeur de la probabilité de défaillance, par contre, dans la méthode FORM, il varie linéairement avec la dimension  $n$  de l'espace et le terme supplémentaire de SORM est évalué en  $n^2$  [Devictor 1996]. Notons que l'application des méthodes FORM ou SORM, dans le cas d'un état limite implicite complexe, requiert soit la construction d'une approximation de la fonction d'état limite au voisinage du point de dimensionnement, soit l'évaluation numérique de gradients et de matrices Hessiennes par un nombre réduit de calculs déterministes en ce même point. On a ainsi recours à la construction d'un modèle de substitution, entre autres, pour suppléer un modèle dont les temps de calculs sont insoutenables pour les méthodes de simulations (voire même pour les méthodes FORM/SORM), pour faire l'analyse fiabiliste. Cette situation peut par exemple se présenter dans le cas de l'utilisation d'un modèle microscopique pour le calcul aux éléments finis d'une structure de la taille d'un barrage.

## V.4 Ouvrages en béton de la centrale hydroélectrique de Song Loulou atteints de RAG

### V.4.1 Présentation de l'aménagement hydroélectrique de Song Loulou

Avec une puissance totale installée de 384 MW, la centrale de Song Loulou est actuellement la plus puissante du Cameroun. Elle a été réalisée en deux phases : de 1976 à 1981 c'est la phase 1 qui s'achève par l'installation des groupes 1 à 4, la phase 2 s'étend de 1984 à 1988 et donne lieu à l'installation des groupes 5 à 8. Elle a une hauteur de chute nette de 41,5m à la cote 528. La figure ci-après présente les ouvrages de l'aménagement hydroélectrique de Song Loulou. Nous avons de la rive droite vers la rive gauche : le barrage déversant, Le barrage principal en enrochements, l'évacuateur de crues à sept pertuis, le barrage de prise à contreforts à huit conduites forcées et l'usine de production. Ces ouvrages, à l'exception du barrage principal, sont en béton armé, et leurs détails sont en Annexe E.



Figure V.5 : Synoptique d'ensemble de l'aménagement hydroélectrique de Song Loulou [ISL 2011]

Cette étude porte principalement sur l'évacuateur de crues à vannes de surface, de 135 m de longueur et 20 m de hauteur. Il est calculé pour évacuer une crue exceptionnelle de 10 000 m<sup>3</sup>/s sous la cote 528,5 avec une vanne bloquée, l'usine étant arrêtée. Il comporte sept passes obturées par des vannes-segment de 14m de largeur et 17m de hauteur, commandées par treuils et chaînes. Ces vannes sont équipées de clapets à manœuvre rapide susceptibles de s'effacer en cas de déclenchement total de l'usine. Ces clapets permettent également le réglage fin de la retenue et l'évacuation des corps flottants. Les passes, dont le seuil est à la cote 511, sont séparées par des piles de 4,5m d'épaisseur, qui supportent à la cote 530 les locaux d'appareillage des vannes. Pour

l'entretien, les vannes segment peuvent être isolées par des batardeaux amont et aval, manœuvrés par des portiques. Les batardeaux amont sont manœuvrables en eau vive. Le volume total de béton de l'évacuateur, y compris les bajoyers et murs-guideaux, est de 73 700 m<sup>3</sup>. Le choix de travailler sur l'évacuateur de crues est justifié dans la section suivante.

#### V.4.2 Justification du choix de l'évacuateur de crues

Les évacuateurs de crues sont des ouvrages en béton présents même sur les barrages de retenue en terre pour lesquels ils ont un impact sécuritaire plus important. Une analyse des risques a été effectuée en 2011 par le cabinet d'experts ISL à la demande de l'entreprise gestionnaire du barrage de Song Loulou. Un extrait concernant les risques induits par les aléas de génie civil de l'évacuateur de crues est donné dans le [Tableau E. 2](#) en annexe. Cinq des neuf aléas mentionnés ont une note de classe de risques très élevée du fait qu'ils induiraient des conséquences graves sur l'aménagement hydroélectrique de Song Loulou. Par exemple, la rupture bajoyer rive gauche sous la poussée du barrage de prise, causée par le gonflement résiduel du béton peut entraîner la perte d'une passe de l'évacuateur et l'ennoiment de l'usine avec une grave incidence financière. Les aléas associés au fonctionnement de l'évacuateur de crues sont quant à eux présentés dans le [Tableau E. 3](#) en annexe. Ainsi, une rupture en crue par submersion du noyau d'argile due à l'indisponibilité de n passes de l'évacuateur de crue peut entraîner une perte de production pendant plusieurs mois, voire la ruine complète du barrage hydroélectrique de Song Loulou. Nous nous intéresserons ainsi à la probabilité de blocage d'une vanne d'évacuateur de crues.

#### V.4.3 Données de modélisation de l'évacuateur de crues

La géométrie et les conditions de chargement utilisées dans la modélisation aux éléments finis d'une pile d'évacuateur de crues du barrage de Song Loulou sont données sur les figures ci-après ([Figure V.6](#)). Des éléments volumiques cub8 ont été utilisés notamment parce que la disposition de leurs nœuds permet une association plus simple aux volumes élémentaires représentatifs (VER) de RAG considérés, et ils prennent mieux les modèles complexes en charge. Le parallélépipède circonscrit à la pile fait 8.5m de large, 52m de long, et une hauteur de 26m. Les autres détails de sa géométrie sont donnés sur le dessin de la [Figure E. 1](#) en annexe. Les directions X, Y et Z sont respectivement les directions rive droite – rive gauche, aval-amont et altimétrique. Dans l'analyse de fiabilité, nous allons considérer 3 facteurs multiplicateurs des dimensions suivant ces directions pour tenir compte des incertitudes sur la géométrie ([Tableau V.2.](#)). Ces facteurs ont été implémentés de sorte qu'ils agissent sur les coordonnées de chacun des points du maillage. Les surfaces de la pile en contact avec la fondation sont bloquées. Les déplacements en X des surfaces latérales des semelles de la pile sont bloqués. Le béton est supposé avoir un comportement mécanique isotrope.

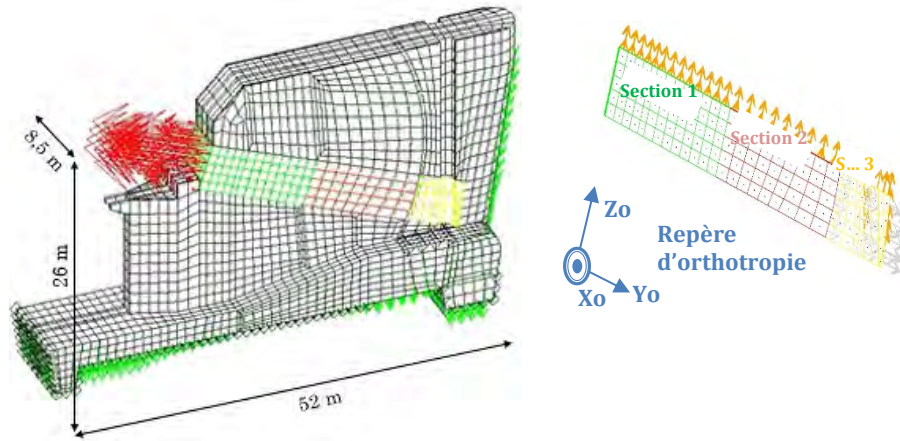


Figure V.6 : Pile de l'évacuateur de crues de Song Loulou et ses 2 tirants modélisés sur Cast3M

L'anisotropie induite par les contraintes principales étant prise en compte par les fonctions poids présentées précédemment (voir procédure implémentée sous Cast3M en Annexe D). Les trois sections du tirant de la pile, incliné de  $19,12^\circ$  par rapport à l'horizontale, ont été modélisées comme constituées de bétons orthotropes équivalents au béton armé (Figure V.6). En considérant un module d'Young  $E_s$  de 210 GPa pour l'acier de ferrailage, le module d'Young équivalent pour chacune des trois sections des tirants dans la direction  $Y$  est donné par :

$$E_{t1Y} = \frac{A_c E_c + A_{st1}(E_s - E_c)}{A_c}, E_{t2Y} = \frac{A_c E_c + A_{st2}(E_s - E_c)}{A_c}, E_{t3Y} = \frac{A_c E_c + A_{st3}(E_s - E_c)}{A_c} \quad \text{Eqn V.23}$$

Où,  $E_c$  est le module d'Young du béton,  $A_c = 198000 \text{ cm}^2$  est la section équivalente du béton identique pour les trois sections du tirant,  $A_{st1} = 1640,6 \text{ cm}^2$  est la section équivalente du ferrailage de la section 1 du tirant,  $A_{st2} = 1093,7 \text{ cm}^2$  est celle de la section 2 du tirant,  $A_{st3} = 546,9 \text{ cm}^2$  est celle de la section 3 du tirant.  $E_c$  et  $R_c$  (résistance à la compression du béton) seront considérés comme aléatoire dans l'analyse fiabiliste menée plus loin (Tableau V.2.). Leurs plages de variation ont été déterminées sur la base de données d'essais effectués en 2006 et 2011 sur des carottes extraites de l'évacuateur. Pour une meilleure prise en compte de l'anisotropie dans les tirants de la pile d'évacuateur de crues, il faudrait modéliser séparément le béton et l'acier au lieu de considérer un béton équivalent comme nous l'avons fait en première approximation. En effet, au voisinage des armatures, le gonflement induit par la RAG entraîne une compression du béton à cause du confinement associé à ces dernières, lesquelles sont tendues. Il existe donc une compression du béton associée à une tension de l'acier qui conduit à un effet d'anisotropie plus prononcé qu'avec l'hypothèse d'un béton armé homogénéisé équivalent. La pile est soumise à son poids propre. La pression exercée sur les vannes et reprise par les tirants, est appliquée comme indiqué à la Figure V.6. Pour simplifier l'approche, cette pression est supposée constante à 1.0646

MPa (équivalent à une force de 21,079 MN par vanne). Cela correspond à la hauteur d'eau maximale, ce qui apporte du conservatisme au résultat.

Le **Tableau V.2**, donne des précisions sur l'ensemble des paramètres utilisés dans notre application à la pile d'évacuateur de crues du barrage de Song Loulou. L'analyse comparative de quelques courbes issues des simulations de Monte-Carlo initiales, aux données d'auscultation des déplacements de la pile 2 (Annexe E), nous a amenés à modifier les plages de variations de certaines des variables de RAG pour l'analyse fiabiliste pour avoir plus de courbes du même ordre de grandeur (voir § V.5.3.3). Les plages modifiées sont indiquées en gras dans le **Tableau V.2**.

Tableau V.2 : Paramètres portant l'aléa pour les calculs fiabiliste de la pile

Paramètres de RAG							
V.A.	Description	Plages 0	Plages 1	Plages 2	Plages 3	Unités	Loi
$X_1$	Diamètre maximal de la plus grande classe granulaire	<b>32 à 125</b>	<b>60 à 125</b>	<b>60 à 125</b>	<b>32 à 125</b>	mm	<i>N</i>
$X_2$	Concentration volumique de granulat par m <sup>3</sup> de béton	0,6 à 0,75	0,6 à 0,75	0,6 à 0,75	0,6 à 0,75	-	<i>U</i>
$X_3$	Fraction de la plus petite classe granulaire dans les granulats	0,25 à 0,55	0,25 à 0,55	0,25 à 0,55	0,25 à 0,55	-	<i>N</i>
$X_4$	Concentration initiale d'alcalin dans la pâte de ciment	<b>100 à 250</b>	<b>220 à 250</b>	<b>220 à 250</b>	<b>200 à 250</b>	mol/m <sup>3</sup>	<i>N</i>
$X_5$	Porosité du mortier	<b>0,1 à 0,3</b>	<b>0,16 à 0,3</b>	<b>0,16 à 0,3</b>	<b>0,2 à 0,3</b>	-	<i>LN</i>
$X_6$	Distance sur laquelle le gel peut migrer pour les petits granulats	1 à 10	1 à 10	1 à 10	1 à 10	μm	<i>U</i>
$X_7$	Volume molaire du gel crée	<b>1.10<sup>-5</sup> à 1,6.10<sup>-5</sup></b>	<b>1,4.10<sup>-5</sup> à 1,6.10<sup>-5</sup></b>	<b>1,4.10<sup>-5</sup> à 1,6.10<sup>-5</sup></b>	<b>1,4.10<sup>-5</sup> à 1,6.10<sup>-5</sup></b>	m <sup>3</sup> /mol	<i>U</i>
$X_8$	Nombre de mole de Na réagissant avec 1 mole de Si pour former le gel (dépend de Na <sub>2</sub> O <sub>eq</sub> /SiO <sub>2</sub> )	<b>0,39 à 0,59</b>	<b>0,39 à 0,42</b>	<b>0,39 à 0,42</b>	<b>0,32 à 0,42</b>	-	<i>LN</i>
$X_9$	Coefficient de fixation des alcalins pris idem pour toutes les classes	<b>-1.10<sup>-7</sup> à -1.10<sup>-9</sup></b>	<b>-5.10<sup>-9</sup> à -1.10<sup>-9</sup></b>	<b>-5.10<sup>-9</sup> à -1.10<sup>-9</sup></b>	<b>-1,5.10<sup>-9</sup> à -1.10<sup>-9</sup></b>	m <sup>3</sup> /m <sup>3</sup> /s	<i>U</i>
Paramètres Matériaux							
V.A.	Description	Plages 0	Plages 1	Plages 2	Plages 3	Unités	Loi
$X_{10}$	Module en compression du béton	10 à 20	10 à 20	10 à 20	10 à 20	GPa	<i>N</i>
$X_{11}$	Résistance en compression	15 à 25	15 à 25	15 à 25	15 à 25	MPa	<i>N</i>
Paramètres Géométriques							
V.A.	Description	Plages 0	Plages 1	Plages 2	Plages 3	Unités	Loi
$X_{12}$	Facteur multiplicateur des X	0,95 à 1,05	0,95 à 1,05	0,95 à 1,05	0,95 à 1,05	-	<i>N</i>
$X_{13}$	Facteur multiplicateur des Y	0,9 à 1,1	0,9 à 1,1	0,9 à 1,1	0,9 à 1,1	-	<i>N</i>
$X_{14}$	Facteur multiplicateur des Z	0,9 à 1,1	0,9 à 1,1	0,9 à 1,1	0,9 à 1,1	-	<i>N</i>
$S_{Rv}$	Seuil du déplacement rive à rive d'un côté de la rainure	5,5 à 8,5	5,5 à 8,5	5,5 à 8,5	5,5 à 8,5	mm	<i>N</i>
$S_{Co}$	Seuil de la norme du déplacement de la console	65 à 80	65 à 80	65 à 80	65 à 80	mm	<i>N</i>

## V.5 Analyse fiabiliste du blocage d'une vanne d'évacuateur de crues

### V.5.1 Méthodologie multi-échelle

Cette méthodologie multi-échelle, de l'échelle d'un volume élémentaire représentatif (VER) à l'échelle d'un ouvrage, consiste à utiliser des modèles de substitution pour réduire considérablement les temps de calcul. A l'échelle du VER, le modèle microscopique a été utilisé dans de nombreuses simulations de Monte Carlo, dont les couples entrées-sortie ont permis de construire le modèle de substitution (Méta-modèle) à cette échelle (Matériau), § III.5.1. On a alors pu se servir de ce modèle de substitution à l'échelle de la structure, pour des calculs déterministes aux nœuds d'une modélisation aux éléments finis, de déplacements induits par la RAG.

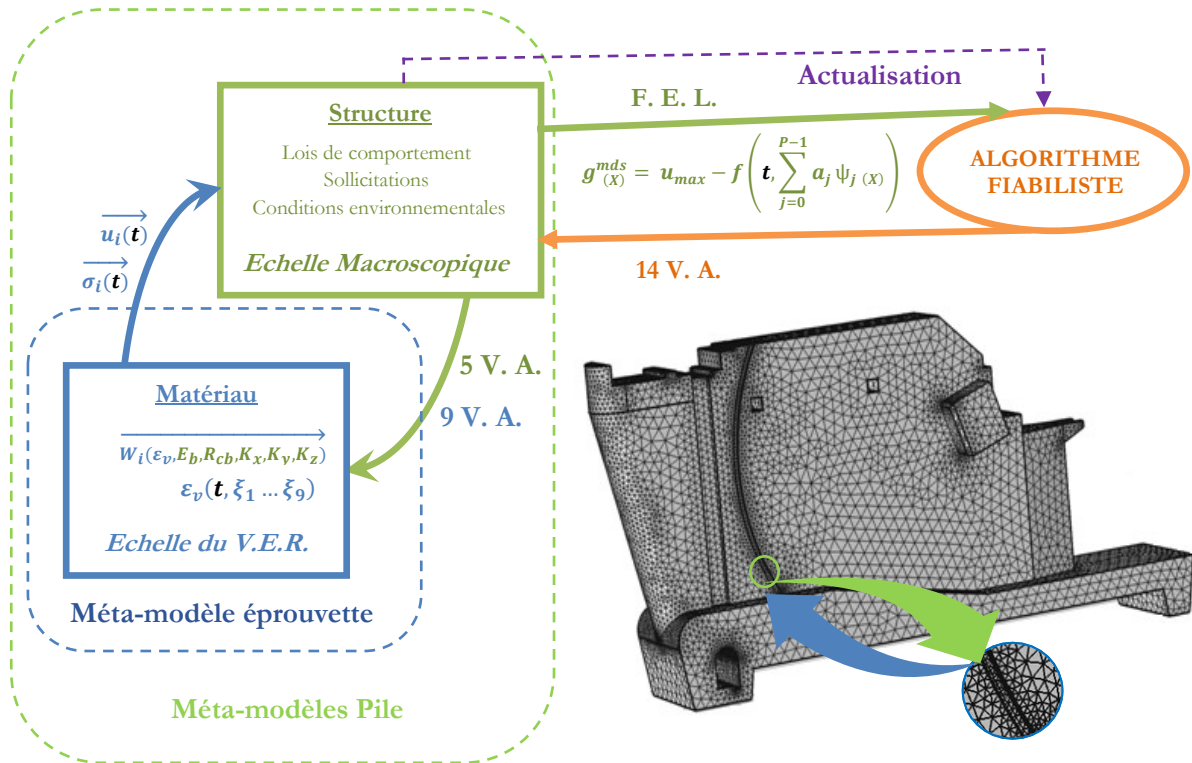


Figure V.7 : Méthodologie pour l'analyse fiabiliste d'une structure à partir d'un modèle microscopique

La rapidité de ces calculs autorise, en des points d'intérêt (liés aux états limites considérés), la construction de modèles de substitution de grandeurs telles que le déplacement maximal. Ces méta-modèles à l'échelle de la structure permettent d'avoir une fonction d'état limite explicite et rapide à calculer, et ainsi de procéder à une analyse fiabiliste.

Les chapitres précédents ont permis de construire le modèle de substitution  $\epsilon_v(t, \xi_1 \dots \xi_9)$  du gonflement volumique d'un VER et de proposer des fonctions poids (§ IV.3)  $W_l(\epsilon_v, E_b, R_{cb}, K_x, K_y, K_z)$  permettant son utilisation à l'échelle de la structure. Ils seront utilisés



par la suite pour élaborer une fonction d'état limite relative aux déplacements maximaux de la console et de la rainure d'une pile d'évacuateur de crue qui respecte la formulation de la probabilité de blocage d'une vanne d'évacuateur de crues donnée dans la prochaine section.

## V.5.2 Formulation des modes de défaillance de l'évacuateur de crues

### V.5.2.1 Modes de défaillance d'une passe vannée

Le blocage de l'évacuateur de crues peut être dû à de nombreuses causes (voir arbres de défaillances des [Figure E. 3](#) à [Figure E. 6](#)). Le contexte dans lequel cette étude sera menée est celui d'une panne structurelle de la vanne ([Figure E. 3](#)). On s'intéressera plus précisément au blocage potentiel de la vanne d'évacuateur de crue (en rouge sur la figure ci-après) associé aux déformations mécaniques consécutives à la RAG et au chargement.

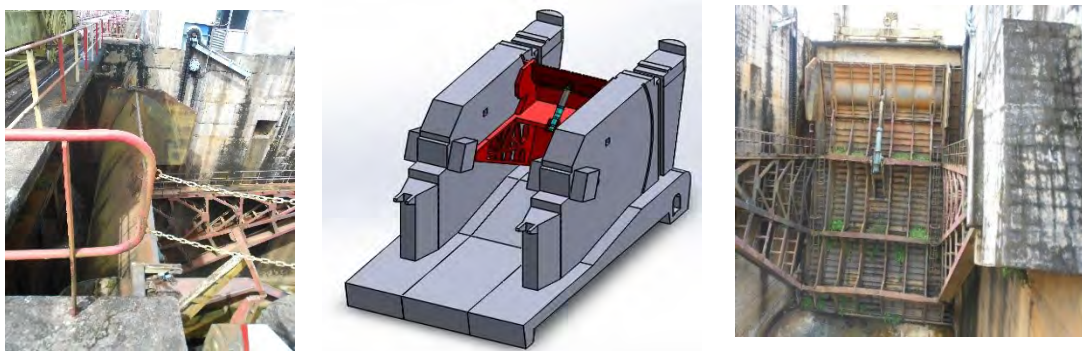


Figure V.8: Rainure vanne (gauche) et console (droite) de l'évacuateur de crues de Song Loulou

Le blocage de la vanne peut être dû au déplacement de la console (à l'extrême droite sur la figure ci-dessus), qui peut empêcher la rotation de la vanne en immobilisant le palier s'il dépasse un certain seuil ou en arc-boutant le bras de la vanne (de couleur rouge). Cet évènement peut se réaliser sur la console de gauche ou celle de droite. Pour la détermination du seuil critique des déplacements de la console, plusieurs approches ont été envisagées. La norme DIN 19704 est utilisée dans la conception des évacuateurs de crues, mais elle ne précise les valeurs des tolérances que pour les pièces mécaniques mobiles, de même que la littérature dédiée aux évacuateurs de crues. D'autres ouvrages dédiés à la conception et au dimensionnement des évacuateurs de crues ont été consultés [Sehgal 1996, Lewin 2001, Erbisti 2014], mais ils n'abordent pas la notion de tolérances sur les dimensions des éléments en béton. [Patev *et al.* 2005, Kalantarnia 2013], ont abordé les défaillances des évacuateurs de manière générale sans s'appesantir sur les défaillances d'origine structurale. [Westberg Wilde & Johansson 2012] se sont intéressés à la fiabilité d'un évacuateur de crue vis-à-vis de la stabilité de sa fondation. [Carvajal 2009, Carvajal *et al.* 2009] se sont penchés sur le calcul stochastique des caractéristiques hydrauliques d'évacuateurs de crues. En somme, aucune indication n'a été trouvée dans la littérature ni auprès du gestionnaire du



barrage pour définir le seuil au niveau de la console. Nous sommes finalement partis d'une probabilité de défaillance a priori de 0.1 à 60 ans d'âge du barrage, étant donné que le mode défaillance traité est un dysfonctionnement de service. Après 10 000 simulations de Monte-Carlo avec le modèle de substitution, la valeur seuil proposée de la norme du déplacement maximal de la console est 70mm. Il est considéré comme une variable suivant une loi normale autour de cette valeur (Tableau V.2).

Le blocage de la vanne peut aussi être dû au rapprochement des piles (déplacements en X) au niveau de la rainure abritant le dispositif de guidage et d'étanchéité de la vanne (figure ci-après). En effet si le jeu fonctionnel de 6 mm nécessaire pour la bonne mobilité de la roue de guidage de la vanne est annulé, par les déplacements induits par la RAG et passé en serrage (jeu négatif), il peut y avoir blocage. Dans ce cas, l'évènement blocage peut être causé par trois situations que sont le dépassement du jeu par le déplacement maximal suivant la direction x sur la rainure gauche, respectivement droite, ou le dépassement de la somme des jeux fonctionnels de la rainure à gauche et à droite par la somme des déplacements maximaux induits par la RAG des rainures gauche et droite. En réalité, la dernière situation inclut les deux premières car si elle vraie, cela signifie que le seuil a été dépassé au moins d'un côté dans l'hypothèse simplificatrice que les déplacements sont entièrement transférés en cas de contact. Nous résumerons donc le blocage dû aux déplacements de la rainure juste à l'évènement somme des déplacements supérieure à la somme des seuils gauche et droit. Ces seuils seront considérés comme des variables aléatoires suivant une loi normale tronquée (Tableau V.2) dont les bornes encadrent la valeur du jeu fonctionnel de 6mm indiqué sur la figure ci-après.

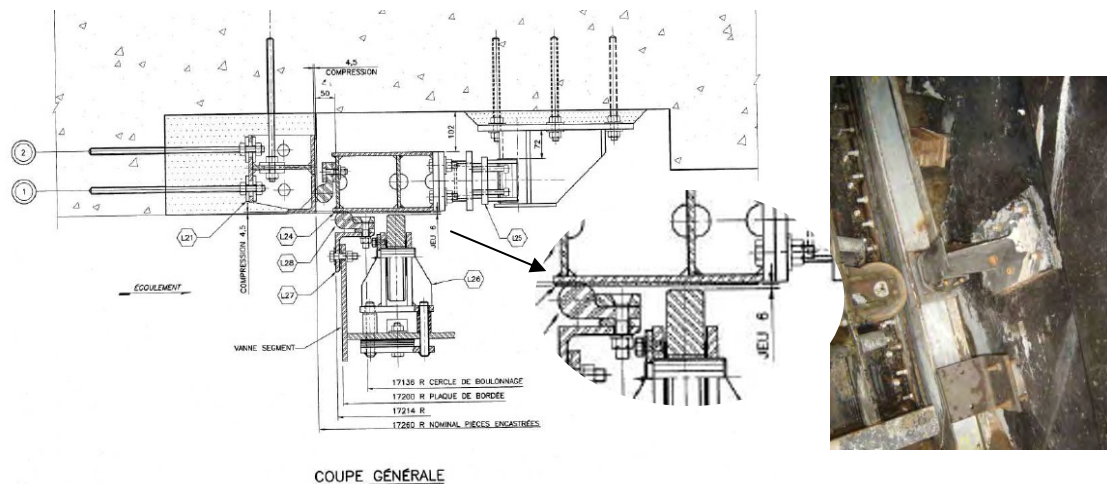


Figure V.9 : Détails d'une rainure de vanne d'évacuateur de crue de Song Loulou

Certaines combinaisons des déplacements dans les directions Y et Z de la rainure de la vanne peuvent également bloquer la vanne. Cependant, compte tenu de la très faible probabilité (*a priori*) de ces cas et la complexité de leur modélisation, nous nous contenterons de l'hypothèse précédente.

#### V.5.2.2 Etats limites de service et ultime considérés pour l'ensemble de l'évacuateur

Au niveau de l'ensemble de l'évacuateur de crues, constitué de sept passes vannées (voir figure ci-dessous), les cas de défaillances de service (ELS) et accidentelle (ELU) seront définis en s'appuyant sur les informations ci-après obtenues auprès du gestionnaire du barrage.

- Le module interannuel est de 2 000 m<sup>3</sup>/s, avec les débits de crues suivants :  $Q_{10} = 7\,400$  m<sup>3</sup>/s,  $Q_{100} = 8\,000$  m<sup>3</sup>/s,  $Q_{1000} = 8\,890$  m<sup>3</sup>/s et  $Q_{10000} = 9\,830$  m<sup>3</sup>/s.
- L'évacuateur a une cote seuil passe de 511m, une cote de crête : 530 m (qui est la même que celle du barrage en remblai qui ne doit surtout pas être submergé) ; sa capacité d'évacuation (10 000 m<sup>3</sup>/s à la cote 528,5 m avec une vanne bloquée et l'usine arrêtée) est d'environ 1666 m<sup>3</sup>/s à la cote 528,5 par vanne.
- Le barrage de prise a un débit de 130 m<sup>3</sup>/s par turbine pour une chute nette de 41,5 m, soit un débit total de 1040 m<sup>3</sup>/s pour ses huit turbines.

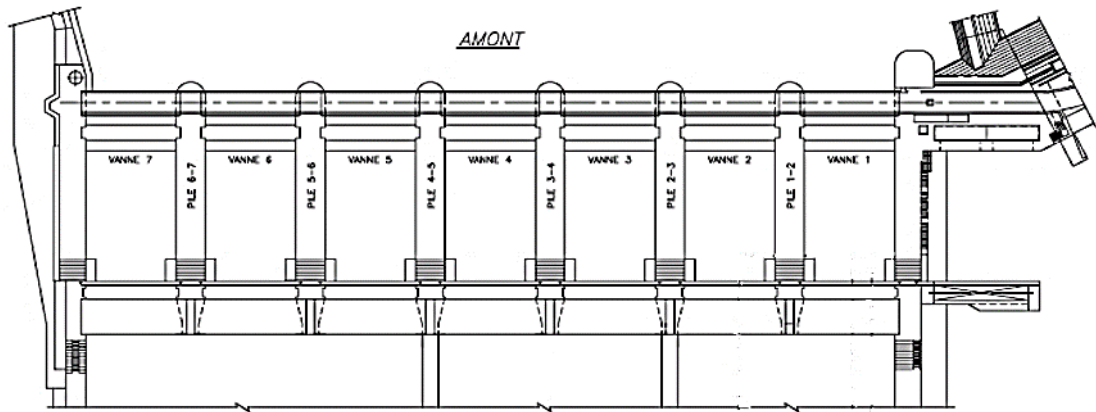


Figure V.10 : Dessin d'ensemble de l'évacuateur de crues

- ✚ Pour l'**état limite de service**, nous considérons que la crue décennale ( $Q_{10} = 7\,400$  m<sup>3</sup>/s) doit pouvoir être évacuée en fonctionnement normal, c'est-à-dire avec le débit de 1040 m<sup>3</sup>/s passant par le barrage de prise. Ceci correspond au fait qu'il y ait au moins 4 vannes en bon état ( $(7400-1040) / 1666 = 3,82$ ). Il y a donc défaillance quand au moins **4 vannes sont bloquées en position fermée**.
- ✚ Pour l'**état limite ultime (ELU)**, nous considérons que la crue de projet ( $Q_{10000} = 9\,830$  m<sup>3</sup>/s) doit être évacuée par l'évacuateur seul à travers au moins 6 vannes. 2 vannes sont défectueuses. L'ELU est atteint dès qu'au moins **2 vannes sont bloquées**.

### V.5.3 Construction des modèles de substitution des déplacements maximum

Avant de présenter la construction des modèles de substitution des divers déplacements d'intérêt, nous présentons les diverses étapes qui nous ont permis de constituer la base de données requise.

#### V.5.3.1 Constitution de la base de données des modèles de substitution de déplacements de la pile à partir de calculs sous Cast3M

Pour ce faire, 3000 simulations de Monte-Carlo ont été réalisées sous Cast3M, à partir de tirages uniformes sur les 14 variables présentées précédemment (Tableau V.2.). Ce nombre a été arrêté de manière à être supérieur à la taille de donnée requise pour construire un développement en chaos polynomial plein d'ordre 3. Les conditions de calculs ont été indiquées dans la section V.4.3. Le pas de calcul est fixé à 30 jrs pour correspondre au pas des températures moyennes prises en compte lors de la construction du modèle de substitution en conditions atmosphériques, soit 720 échéances pour 60 ans. Ce modèle construit au paragraphe III.5.1 sera utilisé pour calculer la déformation (gonflement isotrope) imposée par la RAG sur chacun des nœuds du maillage. Les fonctions poids proposées étant évaluées à chaque échéance, en fonction des contraintes principales en chaque nœud pour y déterminer la part du gonflement volumique à affecter à chacune des 3 directions du repère général (procédure du Tableau IV.1). Les points sur lesquels les déplacements ont été enregistrés à chaque pas de calcul sont présentés sur la figure ci-dessous.

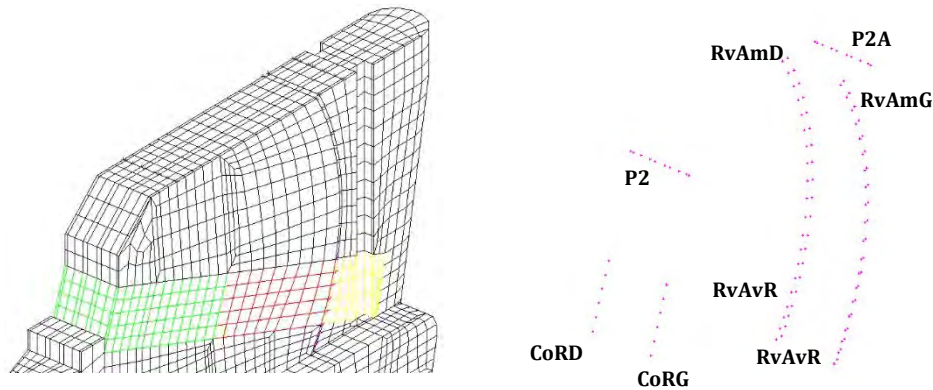


Figure V.11 : Points d'enregistrement des déplacements au cours du calcul Cast3M

Il s'agit des points dont les déplacements serviront d'une part pour le recalage des plages par comparaison aux données d'auscultation (point P2 correspondant au point des mesures réelles), et d'autre part à l'analyse fiabiliste à travers les fonctions d'état limites (CoRG pour Console Rive Gauche, RvAmG pour Rainure Vanne Amont Gauche). Les points P2A sont d'autres points d'auscultation qui n'ont finalement pas été utilisés à cause de l'inconsistance des données.

Les courbes de la figure ci-après représentent l'allure type des déplacements maximaux obtenus pour les nœuds de chaque zone d'intérêt. Elles sont de formes sigmoïdales comme les cinétiques de gonflement de RAG qui pilote en fait le comportement mécanique de la pile (supposé élastique) avec des charges fixées à leurs valeurs maximales. Elles peuvent être évaluées par l'expression mathématique suivante :

$$\|U\|(t) = \frac{1 - e^{-\frac{t}{\tau_c}}}{1 + e^{-\frac{t-\tau_L}{\tau_c}}} (\|U\|_{Max} - \|U\|_0) + \|U\|_0 \quad \text{Eqn V.24}$$

où  $\|U\|_0$  est le déplacement initial (flèche instantanée) dû au poids propre et au chargement mécanique et  $\|U\|_{Max}$  le déplacement atteint en fin de cinétique.

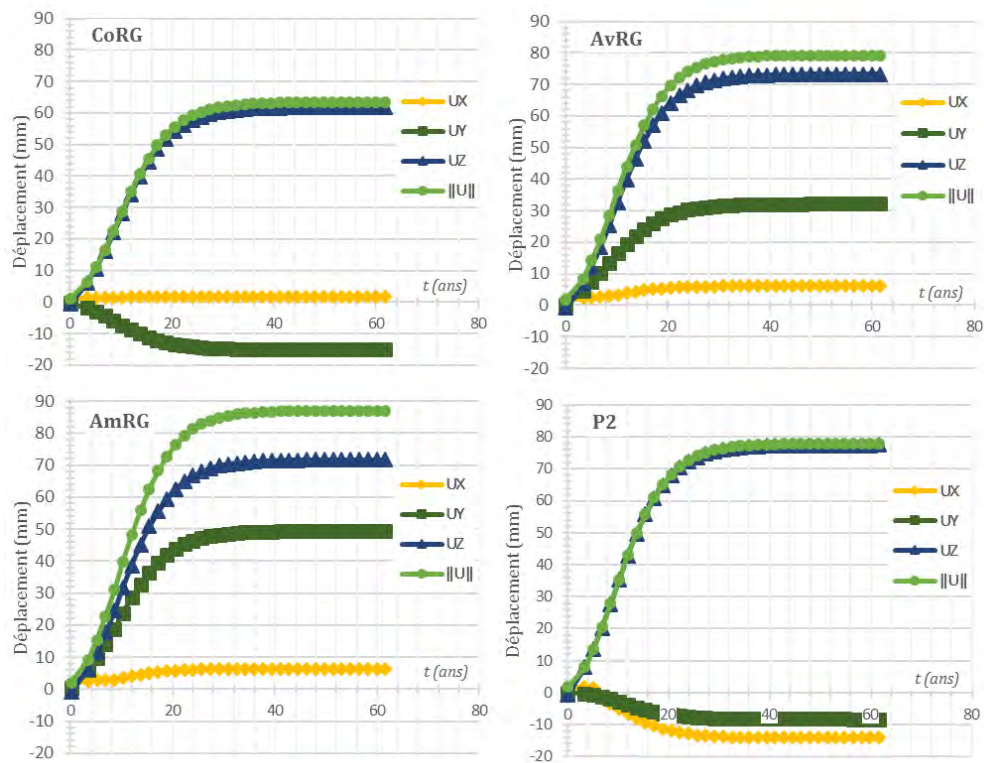


Figure V.12 : Courbes de déplacements types aux principaux points de calcul

L'allure des courbes de P2 (point d'auscultation) est conforme à celle des mesures d'auscultations correspondantes en Annexe E, sachant que les directions X (rive droite – rive gauche pour nos calculs Cast3M) et Y (aval-amont) sont inversées par rapport à celles des mesures. L'ordre de grandeur est également concordant. Cependant, les courbes représentées ici sont des tirages minoritaires des plages de valeurs initiales. Nous ferons un recalage des plages pour en faire une tendance quasi-moyenne des cinétiques calculées. La différence des déplacements suivant Y des nœuds d'une rainure de vanne (AmRG et AvRG) est justement due à la position aval ou amont de ces derniers. Nous allons principalement nous intéresser à leur déplacement suivant X qui participera à l'un des états limites définis précédemment. Pour ce qui est des déplacements

de la console, nous nous servons de leur norme dans la détermination de l'état limite qu'elle induit sur la vanne. Ainsi, la construction de trois modèles de substitution sera entreprise. L'un d'entre eux se substituera à la norme du déplacement au point d'auscultation (UnP2 qui servira pour le recalage des plages). Les deux autres, UxRv (déplacement maximal de la rainure suivant la direction X) et UnCo (norme du déplacement maximal de la console), serviront à l'évaluation des états limites au cours de l'analyse fiabiliste. Il a donc été nécessaire de rechercher la position du nœud ayant le déplacement maximal pour savoir s'il est fixe ou pas. Pour chacun de nos 720 points des 3000 cinétiques de déplacements (2 160 000 cas au total), nous avons enregistré la position du nœud de la norme du déplacement sur la console (les nœuds considérés étant à l'interface avec la plaque d'appui des tourillons de vanne et la pile) et le déplacement maximal de la rainure suivant la direction X. Les statistiques des résultats obtenus montrent (figure-après) que le point de déplacement maximal de la console (UnCoRG) est toujours le nœud du groupe avec la plus grande altitude, tandis qu'il est réparti sur la partie haute de la rainure (UxAvRG). Pour ce dernier cas, il est à noter que quand bien même le déplacement maximal est mobile, la différence des déplacements des points voisins est de l'ordre du centième de millimètre.

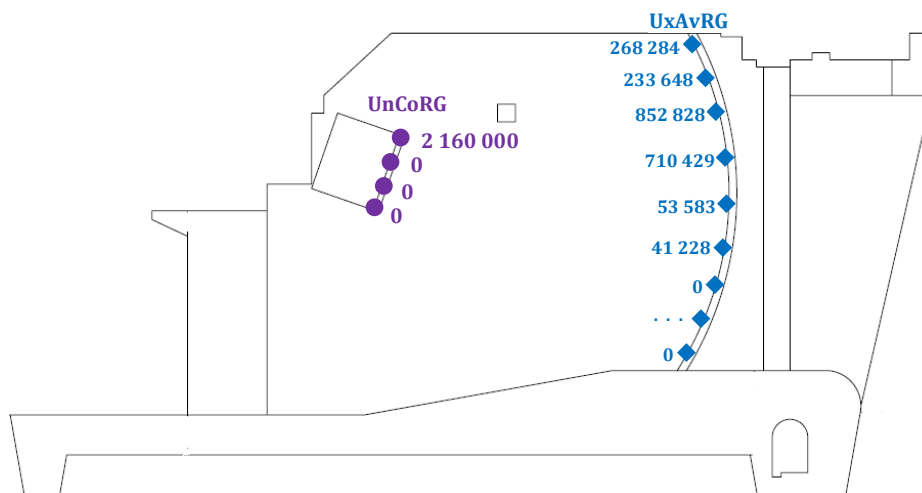


Figure V.13 : Répartition du déplacement maximal sur la console et la rainure

Nous construirons donc les modèles de substitution au point les plus hauts de chaque partie sachant que pour la rainure, cela correspond quasiment au déplacement de toute une zone ce qui rend d'ailleurs plus plausible les hypothèses émises pour le blocage induit par le déplacement de la rainure. Sur l'ensemble des déplacements enregistrés, les déplacements aux points d'intérêt sont extraits pour constituer la base de données de construction des modèles de substitution. Cette base de données a le format indiqué sur le tableau ci-après. Nous rappelons que les 3000 cinétiques construites à partir de calculs Cast3M correspondent à des simulations de Monte Carlo de tirages uniformes sur quatorze variables aléatoires, dont neuf sont celles du



modèle de RAG, deux sont des paramètres mécaniques du béton (résistance en compression et module d'élasticité) et les trois derniers, des paramètres géométriques (voir [Tableau V.2](#)).

Tableau V.3 : Format des données utilisées pour la construction des DCP des déplacements

$j$	$\xi_1 : \text{DMAX}(3)$	$\xi_2 : \text{CONGRA}$	$\xi_3 : \text{FRAGRA}(1)$	$\xi_4 : \text{CNAO}$	$\xi_5 : \text{POROMO}$	$\xi_6 : \text{COLC}(1)$	$\xi_7 : \text{VMGEL}$	$\xi_8 : \text{RNSc}$	$\xi_9 : \text{FIXNA}$	$\xi_{10} : E_c$	$\xi_{11} : R_c$	$\xi_{12} : F_x$	$\xi_{13} : F_y$	$\xi_{14} : F_z$	UnP2	UnCo	UxRv
1	0,8	-0,3	-0,6	-0,2	-0,7	-0,2	-0,4	0,9	-0,1	-0,2	-0,7	-0,1	-0,9	-0,2	70		70
2	0,7	0,1	0,8	-0,0	0,8	-0,4	0,2	-0,7	0,4	-0,0	0,8	0,4	-0,2	-0,0	52		52
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...		...
2999	-0,9	0,5	0,1	0,6	0,9	-0,4	-0,4	0,1	0,4	0,6	0,9	0,4	0,5	0,6	31		31
3000	-0,1	0,2	-0,5	0,1	0,9	-0,4	-0,9	-0,4	0,5	0,1	0,9	0,5	0,1	0,1	21		21

### V.5.3.2 Modèles de substitution des déplacements d'intérêt

A partir des données précédentes, nous avons déterminé chacun des 4 paramètres de l'expression [Eqn V.24](#). Le paramètre  $\|U\|_0$  est la première valeur de chaque déplacement, tandis que  $\|U\|_{\text{Max}}$  en est la dernière.  $\tau_c$  et  $\tau_L$  sont ajustés suivant la méthode de Levenberg-Marquardt présentée en [Annexe C](#) et adapté à la nouvelle expression. Pour chacun de nos déplacements d'intérêt (UnP2, UnCo et UxRv), nous avons déterminé 3000 quadruplets ( $\|U\|_0, \|U\|_{\text{Max}}, \tau_c, \tau_L$ ) qui servent de base à la construction des développements en chaos sur ces paramètres. La méthode de construction de développement en chaos creux et adaptatif (§ [III.2.2.4](#)) implémentée dans l'outil OpenTURNS a été utilisée pour construire les modèles de substitution. Cette approche permet de réduire le nombre de termes du Dcp en conservant une bonne précision. Ainsi, lieu des 680 ( $17!/(14!3!)$ ) termes qu'un Dcp plein à l'ordre 3 à partir de nos 14 variables aléatoires aurait eu, nous aurons pour chacun des Dcp réduits (31 termes pour le plus court). Il est également à noter que contrairement au DCP plein qui se fait en utilisant tous les termes d'une base, l'utilisation du Dcp creux et adaptatif peut conduire à des séquences différentes d'une variable à l'autre étant donné que les termes de faible importance sont éliminés au cours de la procédure de construction. De ce fait, les indices que nous utiliserons dans les expressions des Dcp de nos déplacements sont ceux des termes indiqués dans l'annexe E correspondante. Etant donné que chacun des déplacements à une expression mathématique de base donnée par l'équation [Eqn V.24](#), nous n'indiquerons par la suite que les Dcp des quadruplets de paramètres de chaque déplacement. Il est aussi important de souligner que le degré du développement a été augmenté sachant que le nombre de termes ajoutés allait être réduit. La valeur de la norme  $q = 0,4$  a été utilisée pour la

génération de la base tronquée utilisée dans la construction des Dcp creux. Nous rappelons que plus  $q$  ( $0 < q \leq 1$ ) est proche de 0, plus les interactions d'ordre élevé entre les variables sont pénalisées (les termes concernés sont éliminés de la base). Ainsi, les expressions obtenues des paramètres du déplacement UnP2, dont les valeurs des coefficients et les expressions des polynômes sont données en Annexe C, sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \|U\|_{Max}^{UnP2}(\xi_1, \dots, \xi_{14}) = a_0^{\|U\|_{Max}} + \sum_{i=1}^{148} a_i^{\|U\|_{Max}} \cdot \Psi_{Li}(\xi_1, \dots, \xi_{14}) \\ \tau_C^{UnP2}(\xi_1, \dots, \xi_{14}) = e^{(a_0^{\tau_C} + \sum_{i=1}^{72} a_i^{\tau_C} \cdot \Psi_{Li}(\xi_1, \dots, \xi_{14}))} \\ \tau_L^{UnP2}(\xi_1, \dots, \xi_{14}) = e^{(a_0^{\tau_C} + \sum_{i=1}^{31} a_i^{\tau_C} \cdot \Psi_{Li}(\xi_1, \dots, \xi_{14}))} \\ \|U\|_0^{UnP2}(\xi_{1,..,14}) = a_0^{\|U\|_0} + \sum_{i=1}^{164} a_i^{\|U\|_0} \cdot \Psi_{Li}(\xi_{1,..,14}) \end{array} \right. \quad \text{Eqn V.25}$$

Les facteurs de qualité ( $Q_{Loo}^2$ ) des quatres Dcp de P2 sont tous supérieurs à 99 %.

Les expressions des paramètres de la norme du déplacement de la console (UnCo), dont les valeurs des coefficients et les expressions des polynômes sont données en Annexe C sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \|U\|_{Max}^{UnCo}(\xi_1, \dots, \xi_{14}) = a_0^{\|U\|_{Max}} + \sum_{i=1}^{155} a_i^{\|U\|_{Max}} \cdot \Psi_{Li}(\xi_1, \dots, \xi_{14}) \\ \tau_C^{UnCo}(\xi_1, \dots, \xi_{14}) = e^{(a_0^{\tau_C} + \sum_{i=1}^{55} a_i^{\tau_C} \cdot \Psi_{Li}(\xi_1, \dots, \xi_{14}))} \\ \tau_L^{UnCo}(\xi_1, \dots, \xi_{14}) = e^{(a_0^{\tau_C} + \sum_{i=1}^{43} a_i^{\tau_C} \cdot \Psi_{Li}(\xi_1, \dots, \xi_{14}))} \\ \|U\|_0^{UnCo}(\xi_{1,..,14}) = a_0^{\|U\|_0} + \sum_{i=1}^{73} a_i^{\|U\|_0} \cdot \Psi_{Li}(\xi_{1,..,14}) \end{array} \right. \quad \text{Eqn V.26}$$

Les facteurs de qualité des Dcp de  $\|U\|_{Max}$ ,  $\tau_C$  et  $\tau_L$  de UnCo sont tous supérieurs à 99 %, tandis que celui de  $\|U\|_0$  est de 95%.

Les expressions des paramètres de la norme du déplacement de la console (UnCo), dont les valeurs des coefficients et les expressions des polynômes sont données en Annexe C sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \|U\|_{Max}^{UxRv}(\xi_1, \dots, \xi_{14}) = a_0^{\|U\|_{Max}} + \sum_{i=1}^{71} a_i^{\|U\|_{Max}} \cdot \Psi_{Li}(\xi_1, \dots, \xi_{14}) \\ \tau_C^{UxRv}(\xi_1, \dots, \xi_{14}) = e^{(a_0^{\tau_C} + \sum_{i=1}^{43} a_i^{\tau_C} \cdot \Psi_{Li}(\xi_1, \dots, \xi_{14}))} \\ \tau_L^{UxRv}(\xi_1, \dots, \xi_{14}) = e^{(a_0^{\tau_C} + \sum_{i=1}^{130} a_i^{\tau_C} \cdot \Psi_{Li}(\xi_1, \dots, \xi_{14}))} \\ \|U\|_0^{UxRv}(\xi_{1,..,14}) = a_0^{\|U\|_0} + \sum_{i=1}^{41} a_i^{\|U\|_0} \cdot \Psi_{Li}(\xi_{1,..,14}) \end{array} \right. \quad \text{Eqn V.27}$$



Les facteurs de qualité des Dcp de  $\|U\|_0$  et  $\|U\|_{Max}$  de UxRv sont tous les deux supérieurs à 99 %, mais ceux de  $\tau_c$  et  $\tau_L$  sont de l'ordre de 95%, mais avec un impact négligeable sur les performances de la sigmoïde.

### V.5.3.3 Recalage des plages de variables aléatoires

Pour se rassurer de la pertinence de nos choix par rapport à la réalité, nous avons confronté les résultats obtenus par simulations de Monte-Carlo aux données d'auscultation dont nous disposons (Annexe E) sur des points en tête de pile (correspondant à P2). Il est à noter que nous utiliserons la norme des déplacements auscultés au lieu d'exploiter les mesures planimétriques et altimétriques séparément. Etant donné que les mesures ont démarré en 1994, soit 14 ans après la mise en service du barrage, nous déterminerons les cinétiques relatives à une origine à 14 ans. La figure ci-dessous représente la distribution des déplacements calculés à 14 ans pour un million de simulations de Monte-Carlo avec les modèles de substitution construits précédemment.

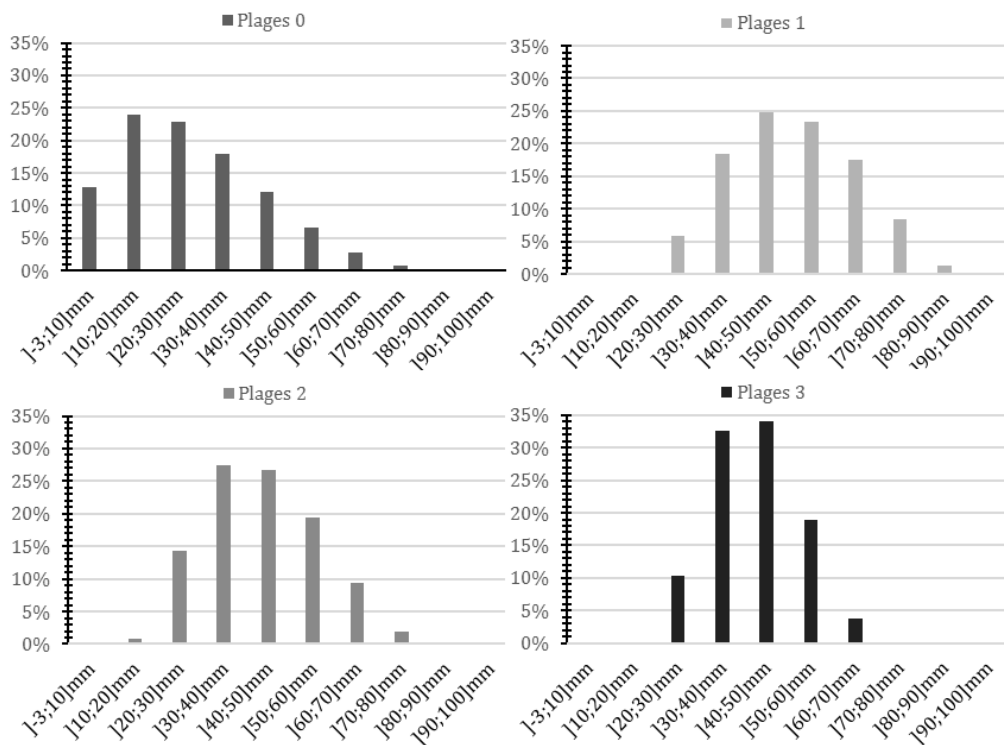


Figure V.14 : Histogrammes de fréquences des déplacements à 14 ans au point P2 – 1 000 000 de tirages

Les plages 0 correspondent aux plages des variables définies dès l'analyse de sensibilité effectuée au chapitre 2. C'est sur ces plages que se sont effectués les tirages pour les simulations de Monte-Carlo effectuées dans Cast3M. Les autres plages sont celles que nous avons utilisées dans la procédure de recadrage. Le premier constat qui se dégage de ces histogrammes c'est que la valeur à 14 ans varie beaucoup en fonction des plages avec une moyenne allant de 25 à 45 mm. La distribution des plages P0 semble suivre une loi log normale comparativement aux autres qui

semblent suivre des lois normales. Pour la procédure de recadrage, nous avons choisi de travailler avec une valeur moyenne du déplacement à 14 ans des plages les plus larges (plages P0) au lieu de travailler avec la valeur instantanée à 14 ans pour chaque cinétique. La figure ci-dessous, positionne les cinétiques minimales, moyennes et maximales de la norme du déplacement calculée au point d'auscultation par rapport au nuage de point de la norme des déplacements mesurés.

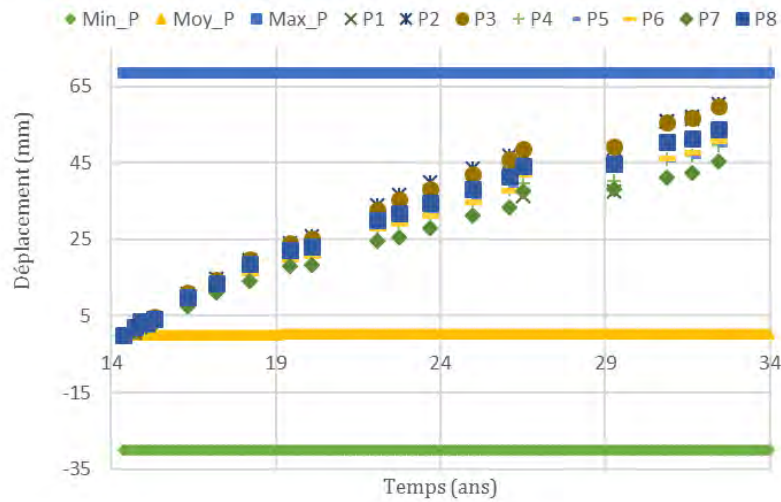


Figure V.15 : Cinétiques de déplacement Min-Moy-Max pour 1000 000 tirages - Plages initiales

On observe que les valeurs obtenues avec le modèle de substitution des variables tirées sur les plages 0 encadrent les valeurs d'auscultation. Cependant les déplacements maximaux sont trop rapidement atteints. De plus l'écart de la moyenne des cinétiques est trop grand avec le nuage de points des mesures. C'est la raison pour laquelle nous avons procédé à une réduction d'intervalle. Et nous avons conservé les plages 3 du [Tableau V.2](#) (appelée plages finales), dont la répartition des cinétiques sur la figure ci-après encadre mieux les points d'auscultation.

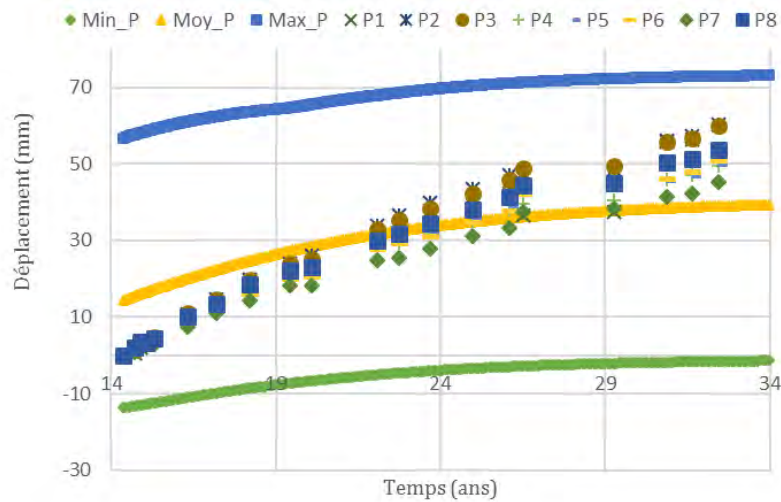


Figure V.16 : Cinétiques de déplacement Min-Moy-Max pour 1000 000 tirages – Plages finales

#### V.5.4 Analyse fiabiliste

Etant donné qu'une formulation de la probabilité de blocage d'une vanne d'évacuateur de crues a été définie, un état limite de service (correspondant au blocage de 3 vannes) et un état limite ultime (correspondant au blocage de 2 vannes), les valeurs seuils déterminées, les modèles de substitution requis pour les calculs ont été construits, les plages de variation des paramètres d'entrée ont été recalées, l'analyse de fiabilité peut maintenant être menée. Cette étude s'intéressera principalement à l'évolution dans le temps de la fiabilité relativement aux modes de défaillances définis précédemment (§ V.5.2), ainsi qu'au rôle joué par chaque variable dans cette évolution. Nous rappelons que pour tenir compte des incertitudes sur les seuils, ces derniers vont être considérés comme des variables aléatoires suivant des lois normales.

La méthode FORM sera principalement utilisée pour déterminer les facteurs d'importance  $(\alpha_i^*)^2$  via le calcul de l'indice de fiabilité d'Hasofer-Lind ( $\beta$ ) à partir de l'algorithme avec contrôle d'erreur sur les gradients de [Duprat *et al.* 2010]. La probabilité de défaillance et les facteurs d'importance seront déterminés à l'aide des expressions :

$$(\alpha_i^*)^2 = \left( \frac{\xi_i^*}{\beta} \right)^2 \quad \text{Eqn V.28}$$

où les  $\alpha_i^*$  sont les facteurs de sensibilité et les  $\xi_i^*$  sont les coordonnées du point de défaillance le plus probable  $P^*$  dans l'espace standard. La probabilité de défaillance et les indices de fiabilité seront déterminés par les méthodes SORM de Breitung (Eqn V.12) et Hohenbichler (Eqn V.13) implémentées dans le code de fiabilité de structure OpenTURNS. L'hypothèse simplificatrice de similitude totale entre les piles est adoptée pour cette étude. Le seuil en millimètre d'un côté de la rainure ( $S_{Rvx}$ ) a été défini comme une variable aléatoire suivant une loi normale tronquée  $N(\mu=7; \sigma=2; \min=5,5; \max=8,5)$ , et le seuil en millimètre de la norme des déplacements au niveau de la console ( $S_{Con}$ ) suit une loi normale tronquée  $N(\mu=70; \sigma=15; \min=65; \max=80)$ , voir Tableau V.2. Les résultats obtenus pour la rainure sont présentés dans la section ci-après.

##### V.5.4.1 Défaillance due au déplacement rive à rive de la rainure de la pile

Le blocage de la vanne suite à un déplacement rive à rive au niveau de la rainure correspond au cas où la somme des déplacements est supérieure à la somme des seuils de part et d'autre de la vanne suivant l'inégalité (G pour Gauche et D pour Droite) :

$$g_{Rvx}(t) = S_{RvxG} + S_{RvxD} - U_{RvxG}(\xi_1^G, \dots, \xi_{14}^G, t) - U_{RvxD}(\xi_1^D, \dots, \xi_{14}^D, t) \leq 0 \quad \text{Eqn V.29}$$

Bien que les seuils  $S_{RvxG}$  et  $S_{RvxD}$  ont la même distribution ( $N(\mu=7; \sigma=2; \min=5,5; \max=8,5)$ ), ils sont tirés séparément. Il en est de même pour les 14 variables physiques dont sont

fonction les déplacements à gauche et à droite. Les probabilités de défaillance ainsi que les indices de fiabilité obtenus à 20, 30, 40, 50 et 60 ans sont présentés sur la figure ci-après.

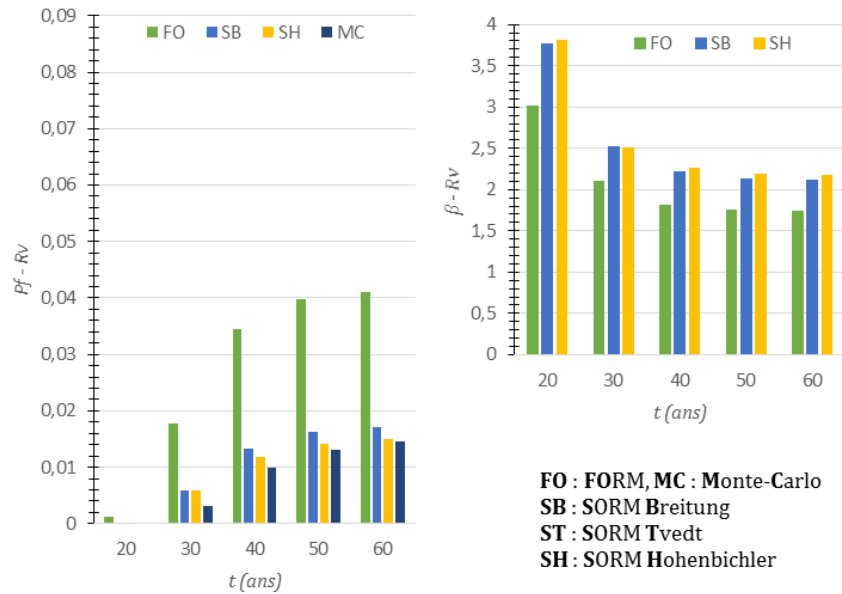


Figure V.17 : Evolution de  $P_f$  et  $\beta$  pour le blocage dû aux déplacements des deux côtés de la rainure

La probabilité de défaillance augmente rapidement au début, puis se stabilise autour de 50 ans. Elle suit approximativement la cinétique de RAG qui pilote le comportement mécanique de la structure. On remarque également que les résultats varient beaucoup en fonction de la méthode utilisée, sachant que les résultats de références sont ceux obtenus par simulation de Monte-Carlo ( $P_f$  allant de 0,000066 à 0,015). Cette variabilité est probablement due à la forte non linéarité de la fonction d'état limite. On peut également constater que les résultats obtenus avec la méthode SORM Hohenbichler se rapproche le plus de ceux obtenus par simulation de Monte-Carlo, bien que l'écart soit non négligeable. Le tableau ci-après donne les facteurs d'importance en pourcentage des 30 variables aléatoires qui interviennent dans la fonction d'état limite  $g_{Rvx}(t)$ . Nous n'avons en réalité présenté que 15 dans le tableau car les valeurs obtenues sont identiques à gauche et droite (du fait de la similitude supposée entre les piles). C'est pour cette raison que la somme des facteurs d'importance indiquée sur chaque colonne vaut 50% au lieu de 100%. Sous le prisme de l'évolution dans le temps, le diamètre maximal de la plus grande classe granulaire, la porosité du mortier, le module et la résistance en compression du béton, les facteurs multiplicateurs en X et Z voit leur importance diminuer avec le temps. Ce constat est globalement conforme aux rôles joués par ces paramètres dans la RAG pour les deux premiers, le comportement mécanique linéaire élastique pour les deux suivants et sur l'ensemble pour les facteurs géométriques. A propos de ces derniers, le facteur multiplicateur suivant X est le plus important des deux (2,8 contre 1,9 % à 20 ans), ce qui est cohérent avec le fait qu'on s'intéresse ici au déplacement suivant X.

Tableau V.4 : Rôle et facteur d'importance (%) des variables pour le blocage de deux côtés de la rainure

Variables	Rôle	20 ans	30 ans	40 ans	50 ans	60 ans
Diamètre maximal de la plus grande classe granulaire G, D	S	2,5	1,5	0,6	0,3	0,3
Concentration volumique de granulat par m <sup>3</sup> de béton G, D	R	0,5	0,5	2,5	3,4	3,7
Fraction de la plus petite classe granulaire dans les granulats G, D	R	0,0	0,8	1,6	1,9	2,0
Concentration initiale d'alcalin dans la pâte de ciment G, D	S	2,2	3,5	2,9	2,7	2,6
Porosité du mortier G, D	R	1,9	1,6	0,9	0,6	0,5
Distance sur laquelle le gel peut migrer pour les petits granulats G,D	R	6,7	10,3	10,6	10,4	10,3
Volume molaire du gel crée G, D	S	3,7	5,3	4,4	4,0	3,9
Nombre mol Na par mol Si pour former le gel G, D	R	0,2	0,5	0,5	0,5	0,5
Coef. de fixation des alcalins pris idem pour toutes les classes G, D	R	0,1	0,0	0,0	0,0	0,0
Module en compression du béton G, D	R	8,6	0,8	0,2	0,2	0,3
Résistance en compression G, D	S	0,6	0,0	0,0	0,0	0,0
Facteur multiplicateur des X G, D	S	2,8	0,9	0,8	1,0	1,0
Facteur multiplicateur des Y G, D	S	1,3	1,0	1,5	1,6	1,7
Facteur multiplicateur des Z G, D	R	1,9	0,1	0,2	0,4	0,5
Déplacement seuil G, D	R	17,1	23,2	23,3	22,9	22,8

Sous le prisme de la consistance des facteurs d'importance, le paramètre prépondérant dans la prévention de la défaillance sont les seuils avec un facteur d'importance de 22,8% en moyenne chacun. Cela indique que ce seuil devrait être défini avec grand soin, et qu'un bon suivi de l'évolution du seuil résiduel au cours du temps peut être très utile dans le cadre de la maintenance. De plus, **il serait judicieux de concevoir (s'ils n'existent pas déjà) des mécanismes de guidage d'évacuateur de crues ayant des jeux conséquents ajustables à travers des dispositifs de réglage et dotés d'instruments de mesure à installer sur de nouveaux barrages et aussi lors d'opération de rénovation de barrages existant.** Ceci dit, les paramètres de RAG sont globalement prépondérants sur les paramètres mécaniques des matériaux et sur les paramètres géométriques de la pile. L'exception du coefficient de fixation des alcalins provient probablement du fait que son intervalle de variation a été considérablement réduit lors du recalage, et aussi de l'accroissement d'importance de la distance sur laquelle le gel peut migrer pour les petits granulats. Cette prépondérance des paramètres microscopiques sur le comportement mécanique d'une pile en béton atteint de RAG souligne d'avantage la nécessité d'accroître la connaissance de leur évolution et des moyens de mesures, bien que ce soit très ardu.

#### V.5.4.2 Défaillance due au déplacement d'une console d'appui de la vanne

La défaillance causée par la console qui est étudiée est celle qui survient, du côté gauche ou droit d'une vanne, lorsque la norme du déplacement maximal de la console dépasse la valeur seuil ( $S_{con}$ ). La fonction d'état limite que suppose cet événement est :

$$g_{Co}(t) = S_{Co} - U_{Co}(\xi_1, \dots, \xi_{14}, t) \leq 0 \quad \text{Eqn V.30}$$

Sur la figure ci-après, on observe comme précédemment que la probabilité de défaillance évolue homothétiquement à la cinétique de RAG. Les probabilités de défaillance dans ce cas sont supérieures à celles obtenues pour la rainure de la vanne, même si cela est probablement plus dû au choix des seuils qu'aux phénomènes physiques en jeu. On observe également une meilleure performance des méthodes SORM, celle de Hohenbichler en particulier, qui donnent des probabilités de défaillance très proches de celles obtenues par simulation de Monte-Carlo.

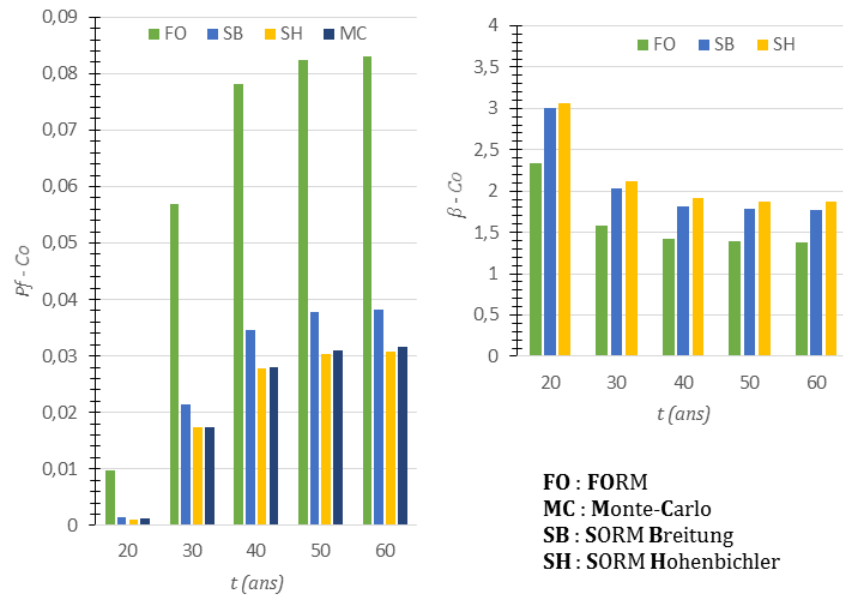


Figure V.18 : Evolution de  $P_f$  et  $\beta$  pour le blocage dû au déplacement d'une console d'appui de la vanne

Tableau V.5 : Rôle et facteur d'importance (%) des variables pour le blocage dû à la console gauche

Variables	Rôle	20 ans	30 ans	40 ans	50 ans	60 ans
Diamètre maximal de la plus grande classe granulaire	S	0,0	0,2	0,5	0,6	0,7
Concentration volumique de granulat par m3 de béton	R	3,3	4,6	7,1	7,8	7,9
Fraction de la plus petite classe granulaire dans les granulats	R	0,2	1,8	3,9	4,4	4,6
Concentration initiale d'alcalin dans la pâte de ciment	S	7,2	8,9	8,7	8,7	8,7
Porosité du mortier	R	7,1	2,6	0,9	0,6	0,5
Distance sur laquelle le gel peut migrer pour les petits granulats	R	23,6	28,8	27,5	27,0	26,9
Volume molaire du gel crée	S	13,0	15,0	14,5	14,3	14,3
Nombre mol Na par mol Si pour former le gel	R	2,2	2,3	2,2	2,2	2,2
Coef. de fixation des alcalins pris idem pour toutes les classes	R	0,3	0,0	0,0	0,0	0,0
Module en compression du béton	S	0,1	0,5	0,8	0,9	0,9
Résistance en compression	S	1,9	0,0	0,0	0,0	0,0
Facteur multiplicateur des X	R	5,8	0,2	0,0	0,0	0,0
Facteur multiplicateur des Y	S	2,8	2,6	2,4	2,4	2,4
Facteur multiplicateur des Z	S	17,9	12,0	10,3	10,0	9,9
Déplacement seuil	R	14,6	20,5	21,1	21,2	21,2

A la suite des observations globales effectuées précédemment, il est important d'indiquer que le rôle des variables ne change pas dans le temps, raison pour laquelle nous l'avons indiqué sur une seule colonne. Les paramètres de la RAG sont toujours prépondérants ici, mais avec des facteurs d'importance plus consistant pour la plupart. Ceci s'explique par le fait qu'on ait considéré la norme du déplacement pour la console à la place du déplacement rive à rive pour la rainure. C'est aussi ce qui justifierait l'augmentation de l'importance des facteurs multiplicateurs de la géométrie, celui de la direction altimétrique Z en particulier. Le seuil a aussi une grande importance ici. **Les plaques d'assises de tourillons de guidage en rotation des vannes peuvent également intégrer un dispositif de réglage des jeux dans les trois directions (en particuliers suivant la direction Z), et une instrumentation de mesures de déplacement, et de contraintes pour réduire les risques de blocages et améliorer la maintenance.**

#### V.5.4.3 Défaillance d'une passe vannée due aux déplacements induits par la RAG

La vanne peut rester bloquée en position fermée si le rapproche des piles au niveau de la rainure absorbe son jeu fonctionnel, ou si le déplacement au niveau de la console bloque le bras de la vanne à gauche ou à droite. Ainsi, l'expression de l'indice de fiabilité (contenant celle de la probabilité de défaillance) dans le cas de la méthode FORM est :

$$\beta_{1V} = -\Phi^{-1}(P_{f1V}) \approx -\Phi^{-1}[1 - \Phi_3(\beta_{Rv}, \beta_{Co}, \beta_{Co}; \rho_3)] \quad \text{Eqn V.31}$$

où,  $\Phi_3$  est la fonction de distribution trinormale,  $\rho_3$  est la matrice de corrélation de rang 3 dont l'expression dans ce cas est :

$$\rho_3 = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_{Rv} \cdot \alpha_{Co} & \alpha_{Rv} \cdot \alpha_{Co} \\ \alpha_{Rv} \cdot \alpha_{Co} & 1 & \alpha_{Co} \cdot \alpha_{Co} \\ \alpha_{Rv} \cdot \alpha_{Co} & \alpha_{Co} \cdot \alpha_{Co} & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Eqn V.32}$$

où est  $\alpha_{Rv}$  et  $\alpha_{Co}$  sont les vecteurs des cosinus directeurs du point de défaillance le plus probable de la rainure et de la console respectivement.

La figure ci-après présente les probabilités de défaillance et les indices de fiabilité obtenus à 20, 30, 40, 50 et 60 ans.

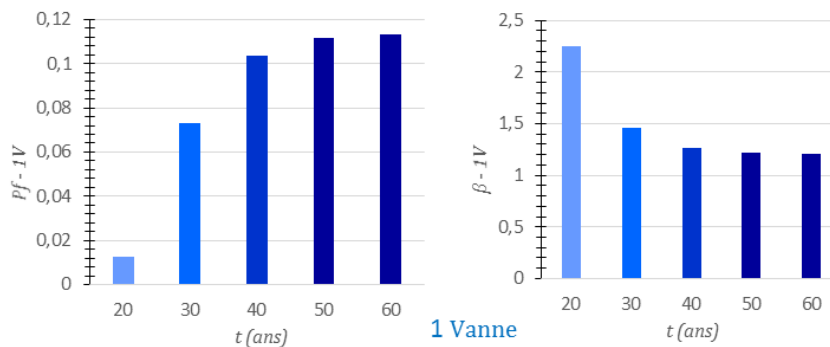


Figure V.19 : Evolution de la probabilité de défaillance système pour différentes configurations



En marge du constat global de l'évolution de la probabilité de défaillance homothétique aux cinétiques de RAG, soulignons qu'elle ( $P_{f_{1V}}$  allant de 1,24 à 11,30 %) est toujours plus grande que la probabilité de défaillance la plus élevée ( $P_{f_{Co}}$  allant de 0,97 à 8,31 %) des événements qui la constitue ; inversement pour l'indice de fiabilité. Notons aussi que la probabilité de défaillance est surévaluée, du fait qu'elle s'appuie sur les calculs faits sur la rainure et la console d'une pile par la méthode FORM dont les résultats se sont avérés très conservateurs par rapport aux valeurs de référence obtenues par simulation de Monte-Carlo.

#### V.5.4.4 Défaillance de l'évacuateur de crues due aux déplacements induits par la RAG

En fonctionnement normal, l'évacuateur de crues doit être capable d'évacuer la crue décennale, et dans un cas exceptionnel, la crue de projet. Nous avons établi (§ V.5.2.2) que cela implique un état limite de service (ELS) de 4 vannes défaillantes et un état limite ultime (ELU) de 2 vannes défaillantes. Les indices de fiabilité qui correspondent sont déterminés par :

$$\begin{aligned}\beta_{ELU} &= -\Phi^{-1}(P_{f_{ELU}}) = -\Phi^{-1}[\Phi_2(-\beta'_{1v}, -\beta'_{1v}; \rho_2)] \\ \beta_{ELS} &= -\Phi^{-1}(P_{f_{ELS}}) = -\Phi^{-1}[\Phi_4(-\beta'_{1v}, -\beta'_{1v}, -\beta'_{1v}, -\beta'_{1v}; \rho_4)]\end{aligned}\quad \text{Eqn V.33}$$

où  $\beta'_{1v}$  est l'indice de fiabilité linéarisé d'une vanne correspondant à un vecteur de cosinus directeurs  $\alpha'_{1v}$  utilisé dans le calcul des termes des matrices de corrélation  $\rho_2$  et  $\rho_4$ .

Les résultats obtenus sont présentés sur la figure ci-après.

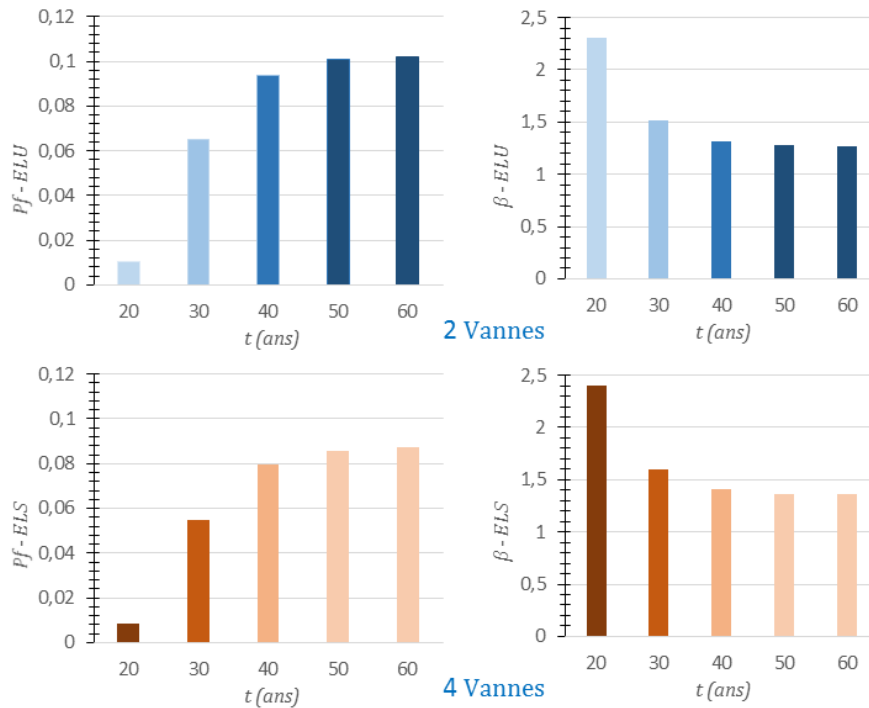


Figure V.20 : Evolution de la probabilité de défaillance système pour différentes configurations

Les probabilités de défaillance augmentent rapidement entre 20 et 40 ans, puis un peu moins vite entre 40 et 60 ans. Concomitamment, les indices de fiabilité diminuent. On peut également observer sans surprise que les probabilités de défaillance de l'état limite ultime ( $P_{f-ELU}$  allant de 1,06% à 10,22%), sont toujours supérieures à celle de l'état limite de service ( $P_{f-ELS}$  allant de 0,83% à 8,72%), à l'inverse des indices de fiabilité ( $\beta_{-ELU}$  allant de 2,31 à 1,27 et  $\beta_{-ELS}$  de 2,39 à 1,36). Ce constat est à nuancer par le fait que la crue de projet, à laquelle est associé l'ELU a une très petite probabilité d'occurrence (période de 10 000 ans).

## V.6 Synthèse

Dans ce chapitre, il était principalement question de l'analyse fiabiliste du blocage d'une vanne ou de plusieurs vannes d'évacuateur de crues du barrage de Song Loulou, dont les piles sont sujettes à la RAG et aux sollicitations mécaniques. La revue bibliographique du cadre et des méthodes d'analyse fiabiliste a permis de préciser les outils à utiliser. Ensuite, l'aménagement hydroélectrique de Song Loulou et la justification du choix de l'évacuateur de crues comme ouvrage d'application (principalement par le fait que sa défaillance soit la plus critique de l'aménagement) ont été présentés. Le cadre et les données de modélisation sous Cast3M d'une pile d'évacuateur de crues du barrage de Song Loulou sujette à la RAG et aux sollicitations mécaniques, dans l'hypothèse simplificatrice d'un comportement linéaire élastique, ont été déroulés. Ensuite, la méthodologie multi-échelle qui sous-tend cette analyse fiabiliste a été présentée. La défaillance est définie dans cette analyse comme le dépassement d'un déplacement seuil au niveau de la console, ou alors le rapprochement critique des piles dans la direction rive à rive, ou enfin la combinaison des 2 événements précédents. Le déplacement seuil de rapprochement de la pile a été défini à partir du dessin de définition du dispositif de guidage et d'étanchéité de la vanne logée dans la rainure. Cela a permis de choisir une valeur de seuil de base de 7mm à laquelle un écart-type de 2mm est associé suivant une loi normale pour tenir compte des incertitudes sur cette valeur. Le déplacement seuil de la console a été estimé en première approximation, en partant d'une probabilité de défaillance *a priori*. Ceci, est dû au fait que nous n'avons pas trouvé dans la littérature [Sehgal 1996, Lewin 2001, Patev *et al.* 2005, Westberg Wilde & Johansson 2012, Kalantarnia 2013, Erbisti 2014] d'indications à ce sujet, la plupart se focalisant sur les tolérances sur les pièces mécaniques et ne tiennent pas compte de la possibilité de gonflement du béton. La constitution du plan d'expérience numérique permettant de construire les modèles de substitution des déplacements d'intérêt, ainsi que les résultats obtenus, ont été détaillés. La méthode de construction de développement en chaos creux et adaptatif a été déployée sur les paramètres des sigmoïdes, fonctions de forme des déplacements. Les facteurs de qualité, par validation croisée, sur ces modèles de substitution sont tous de l'ordre de 99% (erreurs de moins de 1%). Un recalage

des plages de variation des paramètres d'entrée des modèles de substitution a été effectué pour mieux encadrer les données d'auscultation en un point en tête de pile sur lequel un modèle de substitution a été construit à cet effet. La rapidité de calcul qu'offre l'utilisation de ces modèles de substitution autorise l'application des simulations de Monte-Carlo et des méthodes FORM/SORM pour l'analyse de la fiabilité au niveau de la rainure et de la console d'une pile. La méthode FORM a cependant été retenue pour pouvoir effectuer une étude des rôles et des facteurs d'importance des variables en plus de celle de l'indice de fiabilité d'Hasofer Lind ou de la probabilité de défaillance au niveau d'une vanne, puis celui de l'évacuateur de crues. Enfin, nous avons étudié tour à tour la défaillance due au rapprochement des piles seules, puis celle due à la console seule. La probabilité de défaillance et l'indice de fiabilité d'une vanne d'évacuateur a été évaluée en considérant qu'elle peut être due soit au rapprochement des piles au niveau de la rainure de vanne, soit par un déplacement excessif de la console de gauche ou celle de droite. Pour l'ensemble de l'évacuateur de crue les indicateurs de fiabilité ont été évalués pour un état limite ultime (2 vannes bloquées) et un état limite de service (3 vannes bloquées) préalablement définis. Ces divers calculs fiabilistes ont été effectués à différentes échéances. L'analyse des résultats indique que le comportement mécanique de l'évacuateur de crues à travers les états limites considérés est piloté par la RAG. En effet tous les indicateurs de fiabilité (probabilités de défaillance et indices de fiabilité) déterminés évoluent homothétiquement aux cinétiques de RAG. De plus les paramètres de RAG, notamment la distance sur laquelle le gel peut migrer, ont des facteurs d'importance supérieurs à ceux des autres. Exception faite des seuils, ce qui nous amené à faire des propositions se résumant à des dispositifs à jeux réglables au niveau du guidage latéral des vannes, ainsi que sur les plaques d'assise des tourillons par lesquels les bras de vannes sont fixés à la console. Il est important de souligner que les résultats présentés dans l'application de ce travail sont à utiliser avec précaution compte tenu du fait qu'ils ont été obtenus avec une très faible quantité de données statistiques entachées d'incertitudes difficilement quantifiables (état initial du béton utilisé dans les essais de gonflement résiduel), et que des hypothèses hydromécaniques simplificatrices (pas de fluage, fonctions poids empiriques, modélisation simplifiée des tirants en béton armé atteint de RAG) ont été faites, ceci ne réduisant en rien la pertinence et l'efficacité de la méthodologie proposée.

## Conclusion générale et perspectives

L'objectif général de ce travail de recherche était de proposer une méthodologie d'évaluation de la fiabilité résiduelle d'ouvrages en béton sujets au gonflement interne dû à la Réaction Alkali-Granulat (RAG), dans l'optique d'une meilleure gestion de leur maintenance. Cette méthodologie multi-échelle, partant de l'échelle d'un volume élémentaire représentatif (VER) à l'échelle d'un ouvrage, a été validée par une application au cas du barrage de Song Loulou géré par ENEO, et pourrait aussi intéresser d'autres structures gérant des barrages atteints de RAG, comme EDF.

La première étape de la méthodologie proposée consiste à choisir un modèle microscopique permettant de rendre compte de la pathologie en s'appuyant tant sur sa physico-chimie que sur les paramètres matériaux de la structure. Pour le faire, une étude détaillée de la Réaction Alkali-Granulats (RAG) a été réalisée sur les plans physico-chimique et phénoménologique. Ses effets sur le béton, en particulier sur celui des barrages, ainsi que les moyens de détection, prévention et réparation ont été exposés. Enfin, une synthèse des différents modèles développés dans la littérature pour rendre compte des effets mécaniques de la RAG a été effectuée. C'est ainsi que le modèle de [Multon *et al.* 2009], s'appuyant sur des paramètres physico-chimiques clairs (Tailles des granulats, concentration en alcalins, porosité du mortier, etc.) a été retenu pour être implémenté dans le cadre de notre méthodologie. Nous avons choisi d'utiliser vingt paramètres du modèle dans notre application, ce nombre pouvant varier en fonction des propriétés du béton. Il est important de noter que nous avons considéré des propriétés physico-chimiques différentes pour le sable et les autres classes granulaires (gravier, caillou), à la différence des usages simplificateur de la littérature qui les considèrent comme identiques [Poyet *et al.* 2007, Ichikawa 2009, Multon *et al.* 2009, Gao 2010, Charpin & Ehrlicher 2012, Gao, Multon, *et al.* 2013, Multon & Sellier 2016]. Ce choix est principalement justifié par les données de construction du barrage de Song Loulou. Nous pouvons également souligner que les incertitudes qui entourent les paramètres d'entrée du modèle, justifient l'approche probabiliste de notre méthodologie.

A la seconde étape de la méthodologie proposée on procède à la construction d'un modèle de substitution du modèle microscopique. Cette étape a été réalisée en deux phases. La première phase a consisté à déterminer le nombre minimal de paramètres à considérer comme variables aléatoires pour efficacement tenir compte des incertitudes. Ainsi, le second chapitre a porté sur la réduction de la dimension stochastique du modèle [Multon *et al.* 2009] à l'aide d'analyses de sensibilité. Après un bref tour d'horizon des méthodes d'analyse de sensibilité, la méthode de

Morris a été retenue [Morris 1991 , Cropp & Braddock 2002b , Campolongo *et al.* 2007 , Ruano *et al.* 2012 , King & Perera 2013]. Pour pouvoir l'appliquer à notre cas, les plages de variations des 20 paramètres du modèle ont été déterminées à partir de la littérature et recalées sur les données de Song Loulou par simulation de Monte-Carlo, en utilisant FORTRAN et java. Puis, les analyses de sensibilité ont principalement été effectuées en conditions de l'essai accéléré LPC N° 44 (38 °C, 100% d'humidité relative), et suivant les conditions naturelles de Song Loulou en température et humidité relative. Nous nous sommes notamment intéressés au volume de gel créé, au gonflement induit du volume élémentaire représentatif (VER), à divers pourcentages du gonflement maximal (5, 25, 50, 75, 90, 95, et 100%), ainsi qu'au temps pour atteindre chaque pourcentage. Nous avons ajouté une petite étape à la méthode de Morris pour gérer les sorties multiples. Il s'agit de calculer une espèce de fréquence cumulée des indices de sensibilité de chaque sortie et de la comparer à un seuil global. Nous sommes ainsi passés des vingt paramètres initialement identifiés dans le modèle, devant potentiellement porter l'aléa, aux neuf dont la variation a une incidence de 95% sur la réponse du modèle, justifiant qu'on en fasse des variables aléatoires. Les onze autres paramètres ont été fixés à leur valeur moyenne respective. Par la suite, la deuxième phase de cette deuxième étape de notre méthodologie a consisté à construire un modèle de substitution du modèle microscopique de RAG par une méthode adaptée de la méthode du développement en chaos polynomial. En effet, dans le chapitre 3, les calculs de divers types d'erreurs montrant une mauvaise performance du modèle de substitution obtenu par la méthode classique relativement au modèle microscopique de départ, nous avons travaillé à une autre solution. Nous avons ainsi proposé et implémenté un modèle de substitution « hybride » basé sur l'expression mathématique d'une sigmoïde dont les trois paramètres sont des développements en chaos de polynômes de Legendre des 9 variables aléatoires précédentes. Pour se faire, nous avons étudié deux cas principaux de construction de la sigmoïde dont le premier avec un point d'inflexion à 45% de la valeur maximale, et le second s'appuyant sur la méthode de régression non linéaire de Levenberg-Marquardt. Bien que cette dernière permette d'obtenir une sigmoïde plus proche de la courbe initiale, les développements en chaos sur 2 de ses 3 coefficients étaient moins précis. Nous avons établi que cela est imputable au fait que les fonctions de répartition, obtenues en classant les réalisations aléatoires de ces 2 coefficients par ordre croissant, sont moins « lisses » que dans les cas qui marchent très bien. Nous avons proposé une solution (qui devrait être affinée ultérieurement) pour résoudre le problème, notamment la composition supplémentaire par la fonction logarithme sur les paramètres de la sigmoïde. Cette méthode de construction de modèle de substitution basée sur la composition de fonction combinée à l'utilisation du développement en chaos polynomial, est une des contributions de la thèse. Ayant obtenu un modèle de substitution avec une erreur d'approximation par validation croisée de l'ordre de 2%, nous sommes passés à l'étape suivante de notre méthodologie.

La troisième étape de la méthodologie proposée consiste à construire un méta-modèle par grandeur d'intérêt à l'échelle de la structure (déplacement maximal, contrainte maximale, déformation maximale, etc.). Pour se faire, nous devons faire une série de calcul en faisant des tirages uniformes sur les neuf variables aléatoires de RAG auxquelles nous avons ajouté deux variables matériaux (module d'Young et résistance à la compression du béton). Le modèle de substitution construit à l'étape précédente permettant de calcul d'un gonflement (déformation) volumique isotrope, il était nécessaire, avant de pouvoir faire les calculs sur la structure, de trouver le moyen de prendre en compte l'anisotropie observée expérimentalement dans la littérature pour des gonflements induits par la RAG sous chargement. C'est ainsi que, dans le chapitre 4 de la thèse, nous avons procédé à l'élaboration de fonction poids pour tenir compte de l'anisotropie du gonflement de RAG sous chargement à partir de la proposition de [Saouma & Perotti 2006], qui nécessite plus d'étapes lors de leur implémentation, et ne sont pas totalement explicites. Les expressions de nos fonctions poids ont été validées par comparaison des résultats obtenus après implémentation dans Cast3M, aux valeurs (déplacements, déformations, contraintes) obtenues expérimentalement par [Multon 2003, Multon *et al.* 2005], sur éprouvettes en béton atteint de RAG pressées axialement et/ou confinées par anneaux en acier. La validation à l'échelle de l'éprouvette étant effective, nous sommes passés au début du cinquième chapitre, à la réalisation de la série de calculs déterministes, sous Cast3M, d'une pile d'évacuateur de crues du barrage de Song Loulou sujette à la RAG et aux sollicitations mécaniques. Nous avons considéré une loi de comportement linéaire élastique pour nos applications, ce qui est à améliorer dans le futur. Le choix de l'évacuateur de crues pour notre application est justifié par le fait que sa défaillance est la plus critique de l'aménagement hydroélectrique de Song Loulou, selon une analyse des risques menée par un cabinet d'experts. La constitution du plan d'expérience numérique permettant de construire les modèles de substitution des déplacements d'intérêt, ainsi que les résultats obtenus, ont été détaillés. La méthode de construction de développement en chaos creux et adaptatif a été déployée sur les paramètres des sigmoïdes, fonctions de forme des déplacements. Les facteurs de qualités, par validation croisée, sur ces modèles de substitution sont tous de l'ordre de 99% (erreurs de moins de 1%). Un recalage des plages de variation des paramètres d'entrée des modèles de substitution a été effectué pour mieux encadrer les données d'auscultation en un point en tête de pile sur lequel un modèle de substitution a été construit à cet effet.

A la quatrième étape de la méthodologie proposée, on procède aux calculs fiabilistes de la structure en se servant des modèles de substitution construits à l'étape précédente. La rapidité de calcul qu'offre l'utilisation de ces modèles de substitution autorise l'application de toutes les méthodes d'analyse de la fiabilité. A la fin du chapitre 5, des calculs de fiabilité d'une pile d'évacuateur de crues relativement au blocage d'une vanne (défaillance fonctionnelle), de 2 vannes

(état limite ultime), puis de 3 vannes (état limite de service) sont menés. Il est important de noter que les déplacements seuils utilisés dans le calcul de la probabilité de défaillance ont été estimés pour la rainure à partir de l'étude d'un dessin de définition, et pour la console en première approximation en partant d'une probabilité de défaillance *a priori*. Ceci, est dû au fait que nous n'avons pas trouvé d'indications dans la littérature [Sehgal 1996 , Lewin 2001, Patev *et al.* 2005 , Westberg Wilde & Johansson 2012 , Kalantarnia 2013 , Erbisti 2014 ] à ce sujet, la plupart se focalisant sur les tolérances sur les pièces mécaniques et ne tenant pas compte de la possibilité de gonflement du béton. L'analyse des résultats indique une prédominance des paramètres physico-chimiques de la RAG (la distance sur laquelle le gel peut migrer en particulier) sur le comportement mécanique de l'évacuateur de crue. Des efforts devraient d'avantages être consentis à leur compréhension et surtout à leur détermination sur des ouvrages existants pour une meilleure maintenance basée sur des prédictions plus justes. Nous préconisons aussi de concevoir et installer des mécanismes de guidage d'évacuateur de crues ayant des jeux conséquents ajustables à travers des dispositifs de réglage et dotés d'instruments de mesure à installer sur de nouveaux barrages et aussi lors d'opération de rénovation de barrages existant. Il serait aussi judicieux de prévoir un système de réglage des jeux dans les trois directions (en particulier suivant la direction altimétrique) sur les plaques d'assises de tourillons de guidage en rotation des vannes, et une instrumentation de mesures de déplacement, et de contraintes pour réduire les risques de blocages et améliorer la maintenance

La cinquième étape de la méthodologie proposée consiste à actualiser les prédictions de l'analyse de fiabilité par la prise en compte de mesures d'auscultation dans un réseau bayésien. Nous n'avons pas pu aller jusqu'au bout de l'application de cette étape à l'analyse de fiabilité du blocage de la vanne d'évacuateur de crues de Song Loulou.

En guise de perspectives à ce travail de recherche, on pourrait :

- Affiner la technique d'utilisation de compositions de fonctions dans la construction de modèles de substitution et produire d'autres exemples d'application ;
- Faire une étude comparative avec les méthodes de construction de modèle de substitution récemment développées par [Konakli & Sudret 2016, Mai & Sudret 2016] ;
- Rechercher les applications possibles de l'étude de la fonction de répartition des réponses d'un modèle ayant des entrées aléatoires obtenues par classement desdites réponses par ordre croissant, en particulier dans les utilisations de la méthode de Monte Carlo ;
- Mener une étude comparative de l'application des fonctions poids proposées aux résultats expérimentaux de travaux récents [Gautam *et al.* 2017a, b , Liaudat *et al.* 2017 , Wald 2017] ;
- Refaire la procédure de construction du modèle de substitution à l'échelle de structure en considérant une loi de comportement plus réaliste que la loi linéaire élastique ;



- Considérer la variabilité des actions extérieures ;
- Rechercher les corrélations qu'il y aurait entre certains paramètres matériaux de RAG (concentration en granulats, porosité, etc.) et les paramètres matériaux du béton (résistance à la compression, module d'Young, etc.) ;
- Passer aux champs aléatoires pour les propriétés du béton ;
- Mener une étude approfondie visant à définir, de manière très précise, les seuils critiques en déplacements, contraintes et déformations conduisant au blocage d'une vanne d'évacuateur de crues dû au gonflement du béton ;
- Combiner le blocage des vannes avec la survenue d'une crue et possiblement des pertes d'intégrité d'équilibre ou structurale de l'ouvrage ;
- Considérer la corrosion des armatures en parallèle à la RAG dans la détérioration d'ouvrages en béton affectés ;
- Construire un réseau bayésien qui permette d'actualiser les prédictions de l'analyse de fiabilité à partir des données incertaines d'auscultation du barrage ;
- Étendre le travail fait pour l'évacuateur de crue aux autres ouvrages en béton de l'aménagement hydroélectrique de Song Loulou (barrage de prise, usine et barrage déversant, pont) avec des modes de défaillances spécifiques à ces ouvrages ;
- Intégrer les résultats dans une démarche d'optimisation de l'inspection.



## Références bibliographiques

1. Altarejos-García, Luis, Ignacio Escuder-Bueno, Armando Serrano-Lombillo, & Manuel Gómez de Membrillera-Ortuño. 2012. "Methodology for estimating the probability of failure by sliding in concrete gravity dams in the context of risk analysis." *Structural Safety* 36–37:1–13. doi: 10.1016/j.strusafe.2012.01.001.
2. Aoues, Younes. 2008. "Optimisation fiabiliste de la conception et de la maintenance des structures." PhD Thesis, Université Blaise Pascal-Clermont-Ferrand II.
3. Aoues, Younes, & Alaa Chateauneuf. 2010. "Benchmark study of numerical methods for reliability-based design optimization." *Structural and multidisciplinary optimization* 41:277–294.
4. Askey, R. 1975. "Orthogonal Polynomials and Special Functions." *CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics*:116.
5. Askey, Richard, & James Arthur Wilson. 1985. "Some Basic Hypergeometric Orthogonal Polynomials that Generalize Jacobi Polynomials." 68.
6. Bangert, F, D Kuhl, & G Meschke. 2004. "Chemo-hygro-mechanical modelling and numerical simulation of concrete deterioration caused by alkali-silica reaction." *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 28:689–714. doi: 10.1002/nag.375.
7. Bažant, Zdeněk P, & Alexander Steffens. 2000. "Mathematical model for kinetics of alkali-silica reaction in concrete." *Cement and Concrete Research* 30:419–428. doi: 10.1016/S0008-8846(99)00270-7.
8. Ben Haha, Mohsen, & Karen Scrivener. 2007. "Mechanical effects of alkali silica reaction in concrete studied by SEM-image analysis."
9. Berveiller, Marc. 2005. "Éléments finis stochastiques : approches intrusive et non intrusive pour des analyses de fiabilité."
10. Blatman, Geraud. 2009a. Adaptive sparse polynomial chaos expansions for uncertainty propagation and sensitivity analysis. In *Methods*: Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II.
11. Blatman, Géraud. 2009b. Adaptive sparse polynomial chaos expansions for uncertainty propagation and sensitivity analysis. Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II.
12. Blatman, Géraud, & Bruno Sudret. 2008. "Sparse polynomial chaos expansions and adaptive stochastic finite elements using a regression approach." *Comptes Rendus Mécanique* 336:518–523. doi: 10.1016/j.crme.2008.02.013.
13. Blatman, Géraud, & Bruno Sudret. 2010a. "An adaptive algorithm to build up sparse polynomial chaos expansions for stochastic finite element analysis." *Probabilistic Engineering Mechanics* 25:183–197. doi: 10.1016/j.probengmech.2009.10.003.

14. Blatman, Géraud, & Bruno Sudret. 2010b. "Efficient computation of global sensitivity indices using sparse polynomial chaos expansions." *Reliability Engineering & System Safety* 95:1216-1229. doi: 10.1016/j.ress.2010.06.015.
15. Blatman, Géraud, & Bruno Sudret. 2011. "Adaptive sparse polynomial chaos expansion based on least angle regression." *Journal of Computational Physics* 230:2345-2367. doi: 10.1016/j.jcp.2010.12.021.
16. Bourdarot, Eric, Alain Sellier, Stéphane Multon, & Etienne Grimal. 2010. "A review of continuum damage modelling for dam analysis." *European Journal of Environmental and Civil Engineering* 14:805-822. doi: 10.1080/19648189.2010.9693263.
17. Breitung, K. 1984. "Asymptotic Approximations for Multinormal Integrals." *Journal of Engineering Mechanics* 110:357-366. doi: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1984)110:3(357).
18. Bulteel, D, E Garcia-Diaz, C Vernet, & H Zanni. 2002. "Alkali-silica reaction: A method to quantify the reaction degree." *Cement and Concrete Research* 32:1199-1206. doi: 10.1016/S0008-8846(02)00759-7.
19. Cameron, R H, & W T Martin. 1947. "The Orthogonal Development of Non-Linear Functionals in Series of Fourier-Hermite Functionals." *Annals of Mathematics* 48:385-392. doi: 10.2307/1969178.
20. Campolongo, Francesca, Jessica Cariboni, & Andrea Saltelli. 2007. "An effective screening design for sensitivity analysis of large models." *Modelling, computer-assisted simulations, and mapping of dangerous phenomena for hazard assessment* 22:1509-1518. doi: 10.1016/j.envsoft.2006.10.004.
21. Capra, B, & J.-P. Bournazel. 1998. "Modeling of Induced Mechanical Effects of Alkali-Aggregate Reactions." *Cement and Concrete Research* 28:251-260. doi: 10.1016/S0008-8846(97)00261-5.
22. Capra, Bruno, & Alain Sellier. 2003. "Orthotropic modelling of alkali-aggregate reaction in concrete structures: numerical simulations." *Mechanics of Materials* 35:817-830. doi: 10.1016/S0167-6636(02)00209-0.
23. Carvajal, Claudio. 2009. "Evaluation probabiliste de la sécurité structurale des barrages-poids." PhD Thesis, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand.
24. Carvajal, Claudio, Laurent Peyras, Patrick Arnaud, Daniel Boissier, & Paul Royet. 2009. "Assessment of hydraulic load acting on dams including filling variability and stochastic simulations." *European Journal of Environmental and Civil Engineering* 13:399-411.
25. CFBR, Comité Français des Barrages et Réservoirs. 2017. Dimensionnement des évacuateurs de crue par la méthode des dommages incrémentaux ou différentiels. In *Recommandations pour la mise en oeuvre d'une méthode applicable aux barrages en France*. Savoie Technolac.
26. Charpin, Laurent. 2013. Modèle micromécanique pour l'étude de l'anisotropie de la réaction alcali-silice, Modèle micromécanique pour l'étude de l'anisotropie de la réaction alcali-silice. Université Paris-Est, Université Paris-Est.

27. Charpin, Laurent, & Alain Ehrlacher. 2012. "A computational linear elastic fracture mechanics-based model for alkali-silica reaction." *Cement and Concrete Research* 42:613-625. doi: 10.1016/j.cemconres.2012.01.004.
28. Charpin, Laurent, & Alain Ehrlacher. 2014a. "Microporomechanics study of anisotropy of ASR under loading." *Cement and Concrete Research* 63:143-157. doi: 10.1016/j.cemconres.2014.05.009.
29. Charpin, Laurent, & Alain Ehrlacher. 2014b. "Simplified Model for the Transport of Alkali-Silica Reaction Gel in Concrete Porosity." *Journal of Advanced Concrete Technology* 12:1-6. doi: 10.3151/jact.12.1.
30. Chastaing, Gaelle, Fabrice Gamboa, & Clémentine Prieur. 2015. "Generalized Sobol sensitivity indices for dependent variables: numerical methods." *Journal of Statistical Computation and Simulation* 85:1306-1333. doi: 10.1080/00949655.2014.960415.
31. Chateauneuf, Alaa, & Younes Aoues. 2008. "Advances in solution methods for reliability-based design optimization." In *Structural Design Optimization Considering Uncertainties*, 251–280. CRC Press.
32. Choi, Seung-Kyum, Ramana V Grandhi, & Robert A Canfield. 2004. "Structural reliability under non-Gaussian stochastic behavior." *Computers & Structures* 82:1113-1121. doi: 10.1016/j.compstruc.2004.03.015.
33. Comby Peyrot, Isabelle. 2006. Development and validation of a 3D computational tool to describe damage and fracture due to Alkali-Silica Reaction in concrete structures. Paris, France: École nationale supérieure des mines.
34. Comi, C, R Fedele, & U Perego. 2009. "A chemo-thermo-damage model for the analysis of concrete dams affected by alkali-silica reaction." *Mechanics of Materials* 41:210-230. doi: 10.1016/j.mechmat.2008.10.010.
35. Couty. 1999. *Réflexion sur la réaction alcali-silice*: Colloque METL-DRAST sur l'alcaliréaction ESPCI.
36. Cremona, Christian. 2011. "Structural Performance: Probability-Based Assessment." 448.
37. Cropp, R, & R. Braddock. 2002a. "The new morris method: An efficient second order screening method." *Reliability Engineering and System Safety* 78:77-83. doi: 10.1016/S0951-8320(02)00109-6.
38. Cropp, Roger A, & Roger D Braddock. 2002b. "The New Morris Method: An efficient second-order screening method." *Reliability Engineering and System Safety* 78:77-83. doi: 10.1016/S0951-8320(02)00109-6.
39. Curt, Corinne, Marc Le Goc, Lucile Torres, & Ismail Fakhfakh. 2017. "Multimodel-Based Diagnosis of Hydraulic Dams." *Journal of Computing in Civil Engineering* 31:4017024.
40. Curt, Corinne, Laurent Peyras, & Daniel Boissier. 2010. "A Knowledge Formalization and Aggregation-Based Method for the Assessment of Dam Performance." *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering* 25:171-184.

41. Curt, Corinne, Aurélie Talon, & Gilles Mauris. 2011. "A dam assessment support system based on physical measurements, sensory evaluations and expert judgements." *Measurement* 44:192-201.
42. de Araújo, JoséMilton, & Armande Miguel Awruch. 1998. "Probabilistic finite element analysis of concrete gravity dams." *Advances in Engineering Software* 29:97-104. doi: 10.1016/S0965-9978(98)00052-0.
43. de Laleu, Vincent. 2000. "Journée ACI du 17 mai 1999—Paris Conséquences de la réaction Alkali-Granulats sur les barrages exploités par EDF." *Revue Française de Génie Civil* 4:577-589. doi: 10.1080/12795119.2000.9692287.
44. De Larrard, François. 2000. "Structures granulaires et formulation des bétons."
45. Dent Glasser, L S, & N Kataoka. 1981. "The chemistry of 'alkali-aggregate' reaction." *Cement and Concrete Research* 11:1-9. doi: 10.1016/0008-8846(81)90003-X.
46. Devictor, Nicolas. 1996. "Fiabilité et mécanique méthodes FORM/SORM et couplages avec des codes d'éléments finis par des surfaces de réponse adaptatives."Thèse de Doctorat, Université Blaise Pascal.
47. Diamond, S, & N Thaulow. 1974. "A study of expansion due to alkali — silica reaction as conditioned by the grain size of the reactive aggregate." *Cement and Concrete Research* 4:591-607. doi: 10.1016/0008-8846(74)90009-X.
48. Ditlevsen, O, & H O Madsen. 1996. "Structural Reliability Methods."384.
49. Dolen, Thimoty P. 2005. "Materials properties model of aging concrete." Denver.
50. Dron, R, F Brivot, & T Chaussadent. 1998. "The mechanism of the alkali-silica reaction." *BULLETIN DES LABORATOIRES DES PONTS ET CHAUSSEES*.
51. Dron, Roger, & Françoise Brivot. 1992. "Thermodynamic and kinetic approach to the alkali-silica reaction. Part 1: Concepts." *Cement and Concrete Research* 22:941-948. doi: 10.1016/0008-8846(92)90118-F.
52. Dron, Roger, & Françoise Brivot. 1993. "Thermodynamic and kinetic approach to the alkali-silica reaction. Part 2: Experiment." *Cement and Concrete Research* 23:93-103. doi: 10.1016/0008-8846(93)90139-Z.
53. Dunant, Cyrille. 2009. "Experimental and modelling study of the alkali-silica-reaction in concrete." doi: 10.5075/epfl-thesis-4510.
54. Dunant, Cyrille F, & Karen L Scrivener. 2010. "Micro-mechanical modelling of alkali-silica-reaction-induced degradation using the AMIE framework." *Cement and Concrete Research* 40:517-525. doi: 10.1016/j.cemconres.2009.07.024.
55. Dunant, Cyrille F, & Karen L Scrivener. 2012. "Effects of uniaxial stress on alkali-silica reaction induced expansion of concrete." *Cement and Concrete Research* 42:567-576. doi: 10.1016/j.cemconres.2011.12.004.
56. Duprat, Frédéric. 2013. Fiabilité des structures. Toulouse.

57. Duprat, Frédéric, Franck Schoefs, & Bruno Sudret. 2011. Surfaces de réponse physiques et polynomiales. In *Fiabilité des ouvrages: Sûreté, variabilité, maintenance, sécurité*, edited by Julien Baroth, Franck Schoefs and Denys Breysse: Hermès-Lavoisier.
58. Duprat, Frédéric, Alain Sellier, Xuan Son Nguyen, & Gérard Pons. 2010. "The projection gradient algorithm with error control for structural reliability." *Engineering Structures* 32:3725-3733. doi: 10.1016/j.engstruct.2010.08.017.
59. Efron, Bradley, Trevor Hastie, Iain Johnstone, & Robert Tibshirani. 2004. "Least angle regression." *The Annals of Statistics* 32:407-499. doi: 10.1214/009053604000000067.
60. Erbisti, PCF. 2014. "Design of hydraulic gates."
61. Esposito, R, & M A N Hendriks. 2017. "Literature review of modelling approaches for ASR in concrete: a new perspective." *European Journal of Environmental and Civil Engineering*:1-21.
62. Fairbairn, Eduardo M R, Fernando L B Ribeiro, Luciana E Lopes, Romildo D Toledo-Filho, & Marcos M Silvano. 2006. "Modelling the structural behaviour of a dam affected by alkali-silica reaction." *Communications in Numerical Methods in Engineering* 22:1-12. doi: 10.1002/cnm.788.
63. Fajraoui, Noura. 2014. Analyse de sensibilité globale et polynômes de chaos pour l'estimation des paramètres : application aux transferts en milieu poreux.
64. Farage, M C R, J L D Alves, & E M R Fairbairn. 2004. "Macroscopic model of concrete subjected to alkali-aggregate reaction." *Cement and Concrete Research* 34:495-505. doi: 10.1016/j.cemconres.2003.09.001.
65. Fasseu, P, B Mahut, & LCPC. 2003. "Aide à la gestion des ouvrages atteints de réactions de gonflement interne." *Guide Technique des LPC (LCPC, 2003)*. doi: ISSN 1151-1516.
66. Fournier, Benoit, Marc-André Bérubé, Kevin J Folliard, & Michael Thomas. 2010. "Report on the Diagnosis, Prognosis, and Mitigation of Alkali- Silica Reaction (ASR) in Transportation Structures." 154. doi: 10.1057/ejis.1996.7.
67. Furusawa, Y, H Ohga, & T Uomoto. 1994. *An Analytical Study Concerning Prediction of Concrete Expansion due to Alkali-Silica Reaction*.
68. Gao, XX, M Cyr, S Multon, & A Sellier. 2013a. "A comparison of methods for chemical assessment of reactive silica in concrete aggregates by selective dissolution." *Cement and Concrete Composites* 37:82-94. doi: 10.1016/j.cemconcomp.2012.12.002.
69. Gao, Xiao Xiao. 2010. Contribution to the requalification of ASR-damaged structures: Assessment of the ASR advancement in aggregates.
70. Gao, Xiao Xiao, Martin Cyr, Stéphane Multon, & Alain Sellier. 2013b. "A three-step method for the recovery of aggregates from concrete." *Construction and Building Materials* 45:262-269.
71. Gao, Xiao Xiao, Stéphane Multon, Martin Cyr, & Alain Sellier. 2013. "Alkali-silica reaction (ASR) expansion: Pessimism effect versus scale effect." *Cement and Concrete Research* 44:25-33. doi: 10.1016/j.cemconres.2012.10.015.



72. Garcia-Diaz, E, J Riche, D Bulteel, & C Vernet. 2006. "Mechanism of damage for the alkali-silica reaction." *Cement and Concrete Research* 36:395-400. doi: 10.1016/j.cemconres.2005.06.003.
73. Gautam, Bishnu Prasad, Daman K Panesar, Shamim A Sheikh, & Frank J Vecchio. 2017a. "Effect of Multiaxial Stresses on Alkali-Silica Reaction Damage of Concrete." *ACI Materials Journal* 114.
74. Gautam, Bishnu Prasad, Daman K Panesar, Shamim A Sheikh, & Frank J Vecchio. 2017b. "Multiaxial Expansion-Stress Relationship for Alkali Silica Reaction-Affected Concrete." *ACI Materials Journal* 114.
75. Gayton, Nicolas. 2002. Dimensionnement semi-probabiliste des coques minces de révolution susceptibles d'instabilités géométriques. Clermont-Ferrand 2.
76. Ghanem, Roger. 1999. "Ingredients for a general purpose stochastic finite elements implementation." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 168:19-34. doi: 10.1016/S0045-7825(98)00106-6.
77. Ghanem, Roger G, & Robert M Kruger. 1996. "Numerical solution of spectral stochastic finite element systems." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 129:289-303. doi: 10.1016/0045-7825(95)00909-4.
78. Ghanem, Roger G, & Pol D Spanos. 2012. "Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach, Revised Edition." 240.
79. Giaccio, G, R Zerbino, J M Ponce, & O R Batic. 2008. "Mechanical behavior of concretes damaged by alkali-silica reaction." *Cement and Concrete Research* 38:993-1004. doi: 10.1016/j.cemconres.2008.02.009.
80. Giorla, Alain. 2013. "Modelling of alkali-silica reaction under multi-axial load."
81. Glasser, Dent L S. 1979. "Osmotic pressure and the swelling of gels." *Cement and Concrete Research* 9:515-517.
82. Godart, Bruno, & André Le Roux. 2008. "Alcali-réaction dans les structures en béton Mécanisme, pathologie et prévention." *Techniques de l'ingénieur Pathologie générale - Pathologie du béton* base documentaire : TIB240DUO. (ref. article : c2252).
83. Goto, Seishi, & Della M Roy. 1981. "Diffusion of ions through hardened cement pastes." *Cement and Concrete Research* 11:751-757.
84. Grimal, E., A. Sellier, S. Multon, Y. Le Pape, & E. Bourdarot. 2010. "Concrete modelling for expertise of structures affected by alkali aggregate reaction." *Cement and Concrete Research* 40:502-507. doi: 10.1016/j.cemconres.2009.09.007.
85. Grimal, Etienne. 2007. Caractérisation des effets du gonflement provoqué par la réaction alcali-silice sur le comportement mécanique d'une structure en béton. Toulouse 3.
86. Grimal, Étienne, Alain Sellier, Yann Le Pape, & Éric Bourdarot. 2008. "Creep, shrinkage, and anisotropic damage in alkali-aggregate reaction swelling mechanism-Part I: A constitutive model." *ACI Materials Journal* 105.

87. Guillemot, T, L Lino, & E Nzalli. 2013. *Diagnostic et mise en sécurité du barrage de Songloulou au Cameroun vis-vis des désordres liés à l'alcali-réaction.*
88. Hanson, W C. 1944. "Studies Relating To the Mechanism by Which the Alkali-Aggregate Reaction Produces expansion in concrete." *ACI Journal Proceedings* 40. doi: 10.14359/8657.
89. Hariri-Ardebili, Mohammad Amin, & Farhad Pourkamali-Anaraki. 2018a. "Simplified reliability analysis of multi hazard risk in gravity dams via machine learning techniques." *Archives of Civil and Mechanical Engineering* 18:592–610.
90. Hariri-Ardebili, Mohammad Amin, & Farhad Pourkamali-Anaraki. 2018b. "Support vector machine based reliability analysis of concrete dams." *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 104:276–295.
91. Hasofer, Abraham M., & Niels C. Lind. 1974. "An Exact and Invariant First Order Reliability Format." *Journal of Engineering Mechanics* 100.
92. Herrador, Manuel F., Fernando Martínez-Abella, & Rodrigo del Hoyo Fernández-Gago. 2009. "Mechanical behavior model for ASR-affected dam concrete under service load: formulation and verification." *Materials and Structures* 42:201-212. doi: 10.1617/s11527-008-9378-6.
93. Hobbs, D W, & W A Gutteridge. 1979. "Particle size of aggregate and its influence upon the expansion caused by the alkali-silica reaction." *Magazine of Concrete Research* 31:235-242. doi: 10.1680/macr.1979.31.109.235.
94. Hohenbichler, Michael, & Ruediger Rackwitz. 1988. "Improvement of second-order reliability estimates by importance sampling." *Journal of Engineering Mechanics* 114:2195–2199.
95. Hong, H P, W Zhou, S Zhang, & W Ye. 2014. "Optimal condition-based maintenance decisions for systems with dependent stochastic degradation of components." *Reliability Engineering & System Safety* 121:276-288. doi: 10.1016/j.ress.2013.09.004.
96. Huang, M, & S Pietruszczak. 1999. "Modeling of Thermomechanical Effects of Alkali-Silica Reaction." *Journal of Engineering Mechanics* 125:476-485. doi: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1999)125:4(476).
97. Huang, Shuping, Sankaran Mahadevan, & Ramesh Rebba. 2007. "Collocation-based stochastic finite element analysis for random field problems." *Probabilistic Engineering Mechanics* 22:194-205. doi: 10.1016/j.pro bengmech.2006.11.004.
98. Ichikawa, Tsuneki. 2009. "Alkali-silica reaction, pessimum effects and pozzolanic effect." *Cement and Concrete Research* 39:716-726. doi: 10.1016/j.cemconres.2009.06.004.
99. Ichikawa, Tsuneki, & Masazumi Miura. 2007. "Modified model of alkali-silica reaction." *Cement and Concrete Research* 37:1291-1297. doi: 10.1016/j.cemconres.2007.06.008.
100. ICOLD-CIGB. 1991. "Alcali-réaction dans les barrages en béton - Aperçu général et recommandations."

101. Iooss, Bertrand, & Andrea Saltelli. 2017. Introduction to Sensitivity Analysis. In *Handbook of Uncertainty Quantification*. Cham: Springer International Publishing.
102. ISL, Ingénierie. 2011. Etudes de sécurité de l'aménagement hydroélectrique de Songloulou au Cameroun.
103. Isukapalli, Sastry S. 1999. "Uncertainty Analysis of Transport-transformation Models."396.
104. Jensen, Viggo. 2012. *Reclassification of alkali aggregate reaction*.
105. Jeon, Jesung, Jongwook Lee, Donghoon Shin, & Hangyu Park. 2009. "Development of dam safety management system." *Advances in Engineering Software* 40:554–563.
106. Jin, Weihua, Christian Meyer, & Stephen Baxter. 2000. "'Glascrete"—Concrete with Glass Aggregate." *ACI Materials Journal* 97. doi: 10.14359/825.
107. Jones, T N. 1988. "A new interpretation of alkali-silica reaction and expansion mechanism in concrete." *Chemistry and Industry*:40-44.
108. Kalantarnia, Maryam. 2013. Reliability Analysis of Spillway Gate Systems. McGill University.
109. Kartal, Murat Emre, Alemdar Bayraktar, & Hasan Basri Başağa. 2012. "Nonlinear finite element reliability analysis of Concrete-Faced Rockfill (CFR) dams under static effects." *Applied Mathematical Modelling* 36:5229-5248. doi: 10.1016/j.apm.2011.12.004.
110. Kawamura, Mitsunori, & Kazuma Iwahori. 2004. "ASR gel composition and expansive pressure in mortars under restraint." *Cement and Concrete Composites* 26:47-56. doi: 10.1016/S0958-9465(02)00135-X.
111. Kim, Taehwan, Jan Olek, & HyunGu Jeong. 2015. "Alkali-silica reaction: Kinetics of chemistry of pore solution and calcium hydroxide content in cementitious system." *Cement and Concrete Research* 71:36-45. doi: 10.1016/j.cemconres.2015.01.017.
112. King, D M, & B J C Perera. 2013. "Morris method of sensitivity analysis applied to assess the importance of input variables on urban water supply yield – A case study." *Journal of Hydrology* 477:17-32. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.jhydrol.2012.10.017>.
113. Koekoek, Roelof, Peter A Lesky, & René F Swarttouw. 2010. Hypergeometric Orthogonal Polynomials. In *Hypergeometric Orthogonal Polynomials and Their q-Analogues*: Springer Berlin Heidelberg.
114. Koekoek, Roelof, & René F Swarttouw. 1996. "The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue."
115. Konakli, Katerina, & Bruno Sudret. 2016. "Reliability analysis of high-dimensional models using low-rank tensor approximations." *Probabilistic Engineering Mechanics* 46:18-36. doi: 10.1016/j.probengmech.2016.08.002.
116. Kucherenko, Sergey, & Bertrand Iooss. 2017. Derivative-Based Global Sensitivity Measures. In *Handbook of Uncertainty Quantification*. Cham: Springer International Publishing.
117. Larive, C, F Toutlemonde, M Joly, A Laplaud, F Derkx, E Merliot, S Multon, E Bourdarot, S Prené, & A Jeanpierre. 2000. *Structural effects of ASR in France on real and laboratory structures*.

118. Larive, Catherine. 1997. Apports combinés de l'expérimentation et de la modélisation à la compréhension de l'alcali-réaction et de ses effets mécaniques. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
119. Le Maître, Olivier P, Matthew T Reagan, Habib N Najm, Roger G Ghanem, & Omar M Knio. 2002. "A Stochastic Projection Method for Fluid Flow: II. Random Process." *Journal of Computational Physics* 181:9-44. doi: 10.1006/jcph.2002.7104.
120. Le Roux, A, E Massieu, & B Godart. 1992. "Evolution under stress of a concrete affected by aar-application to the feasibility of strengthening a bridge by prestressing." *Proceedings of the 9th International Conference on Alkal-Aggregate Reaction* 108:599-606.
121. Lebrun, Régis. 2013. Contributions à la modélisation de la dépendance stochastique. Université Paris-Diderot - Paris VII.
122. Lebrun, Régis, & Anne Dutfoy. 2009. "A generalization of the Nataf transformation to distributions with elliptical copula." *Probabilistic Engineering Mechanics* 24:172-178. doi: 10.1016/j.probengmech.2008.05.001.
123. Leemann, A, & P Lura. 2013. "E-modulus of the alkali-silica-reaction product determined by micro-indentation." *Construction and Building Materials* 44:221-227. doi: 10.1016/j.conbuildmat.2013.03.018.
124. Léger, P, P Côté, & R Tinawi. 1996. "Finite element analysis of concrete swelling due to alkali-aggregate reactions in dams." *Computers & Structures* 60:601-611. doi: 10.1016/0045-7949(95)00440-8.
125. Lemaire, Maurice, Alaa Chateauneuf, & Jean-Claude Mitteau. 2005. "Fiabilité des structures: Couplage mécano-fiabiliste statique."
126. Lewin, J. 2001. "Hydraulic gates and valves: in free surface flow and submerged outlets."
127. Li, Kefei. 2002. "Modélisation chimico-mécanique du comportement des bétons affectés par la réaction d'alcali-silice et expertise numérique des ouvrages d'art dégradés." *PhD Thesis - ENPC*:1-219.
128. Liaudat, Joaquín, Ignacio Carol, Carlos M López, & Victor E Saouma. 2017. "ASR expansions in concrete under triaxial confinement." *Cement and Concrete Composites*.
129. Lombardi, J, P Massard, & A Perruchot. 1997. "Mesure expérimentale de la cinétique de formation d'un gel silicocalcique, produit de la réaction alcalis-silice." *Cement and Concrete Research* 27:1379-1391. doi: [http://dx.doi.org/10.1016/S0008-8846\(97\)00128-2](http://dx.doi.org/10.1016/S0008-8846(97)00128-2).
130. Lourakis, Manolis I A. 2005. "A brief description of the Levenberg-Marquardt algorithm implemented by levmar." *Foundation of Research and Technology* 4:6.
131. Mai, Chu V, & Bruno Sudret. 2016. "Surrogate models for oscillatory systems using sparse polynomial chaos expansions and stochastic time warping." *arXiv preprint arXiv:1609.09286* 5:540-571. doi: 10.1137/16M1083621.

132. Marquardt, Donald W. 1963. "An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters." *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics* 11:431-441. doi: 10.1137/0111030.
133. Matthies, Hermann G, & Andreas Keese. 2005. "Galerkin methods for linear and nonlinear elliptic stochastic partial differential equations." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 194:1295-1331. doi: 10.1016/j.cma.2004.05.027.
134. Mazars, Jacky. 1984. "Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure." *THESE DE DOCTEUR ES SCIENCES PRESENTEE A L'UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE-PARIS 6*.
135. Melchers, R E. 1990. "Search-based importance sampling." *Structural Safety* 9:117-128. doi: 10.1016/0167-4730(90)90003-8.
136. Mills-Bria, B, L Nuss, L Dixon, C Powell, D Harris, & D O'Connell. 2006. "State-of-practice for the nonlinear structural analysis of dams at the bureau of reclamation."
137. Mohammadkhani Shali, Soheil. 2007a. Contribution à l'étude de la redondance dans les ponts: analyse des mécanismes de défaillance par surfaces de réponse. France, France: École nationale des ponts et chaussées.
138. Mohammadkhani Shali, Soheil. 2007b. Contribution à l'étude de la redondance dans les ponts: analyse des mécanismes de défaillance par surfaces de réponse. France: École nationale des ponts et chaussées.
139. Molinaro, Annette M, Richard Simon, & Ruth M Pfeiffer. 2005. "Prediction error estimation: a comparison of resampling methods." *Bioinformatics* 21:3301-3307.
140. Moon, Juhyuk, Sergio Speziale, Cagla Meral, Bora Kalkan, Simon M. Clark, & Paulo J. M. Monteiro. 2013. "Determination of the elastic properties of amorphous materials: Case study of alkali-silica reaction gel." *Cement and Concrete Research* 54:55-60. doi: 10.1016/j.cemconres.2013.08.012.
141. Morenon, Pierre. 2017. "Modélisation des réactions de gonflement interne des bétons avec prise en compte des couplages poro-mécaniques et chimiques."Thèse de doctorat, Université de Toulouse, Université Toulouse III-Paul Sabatier.
142. Morenon, Pierre, Stéphane Multon, Alain Sellier, Etienne Grimal, François Hamon, & Eric Bourdarot. 2017. "Impact of stresses and restraints on ASR expansion." *Construction and Building Materials* 140:58-74. doi: 10.1016/j.conbuildmat.2017.02.067.
143. Morris, Max D. 1991. "Factorial Sampling Plans for Preliminary Computational Experiments." *Technometrics* 33:161. doi: 10.2307/1269043.
144. Multon, S, M Cyr, A Sellier, N Leklou, & L Petit. 2008. "Coupled effects of aggregate size and alkali content on ASR expansion." *Cement and Concrete Research* 38:350-359. doi: 10.1016/j.cemconres.2007.09.013.
145. Multon, Stéphane. 2003. Évaluation Expérimentale Et Théorique Des Effets Mécaniques De L'Alcali-Réaction Sur Des Structures Modèles. Marne-la-Vallée.

146. Multon, Stéphane, Jean-François Seignol, Eric Bourdarot, Alain Jeanpierre, & François Toutlemonde. 2005. "Effets structuraux de l'alcali-réaction." *Revue Européenne de Génie Civil* 9:1219-1247. doi: 10.1080/17747120.2005.9692808.
147. Multon, Stéphane, & Alain Sellier. 2016. "Multi-scale analysis of alkali-silica reaction (ASR): Impact of alkali leaching on scale effects affecting expansion tests." *Cement and Concrete Research* 81:122-133.
148. Multon, Stéphane, Alain Sellier, & Martin Cyr. 2009. "Chemo-mechanical modeling for prediction of alkali silica reaction (ASR) expansion." *Cement and Concrete Research* 39:490-500. doi: 10.1016/j.cemconres.2009.03.007.
149. Multon, Stéphane, & François Toutlemonde. 2006. "Effect of applied stresses on alkali-silica reaction-induced expansions." *Cement and Concrete Research* 36:912-920. doi: 10.1016/j.cemconres.2005.11.012.
150. Myers, William R. 2013. Response Surface Methodology. In *Encyclopedia of Biopharmaceutical Statistics, Second Edition*: Taylor & Francis.
151. Naar, Raphaëlle. 2009. Modelling of the mechanical behavior of concrete using a coupled multi-physics approach (chemical-mechanical coupling): application to alkali-silica reaction, Modelling of the mechanical behavior of concrete using a coupled multi-physics approach (chemica. École Nationale Supérieure des Mines de Paris, École Nationale Supérieure des Mines de Paris.
152. Nataf, A. 1962. "Détermination des distributions dont les marges sont données." *Comptes rendus de l'académie des sciences* 225:42-43.
153. Ngo, Viet Duc. 2015. "Contribution à l'approche probabiliste de la durabilité des structures en béton soumise à la carbonatation." PhD Thesis, Toulouse, INSA.
154. *Algorithmes probabilistes appliqués à la durabilité et à la mécanique des ouvrages de Génie Civil.*
155. Nguyen, Xuan Son, Frédéric Duprat, Alain Sellier, & Gérard Pons. 2007. "An adaptive response surface method based on double weighted regression." *Probabilistic Engineering Mechanics* 31:1-10. doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2013.04.0335.
156. Nguyen, Xuan Son, Alain Sellier, Frédéric Duprat, & Gérard Pons. 2009. "Adaptive response surface method based on a double weighted regression technique." *Probabilistic Engineering Mechanics* 24:135-143.
157. Nielsen, A, F Gottfredsen, & F Thøgersen. 1993. "Development of stresses in concrete structures with alkali-silica reactions." *Materials and Structures* 26:152-158. doi: 10.1007/BF02472932.
158. Ollivier, Jean-Pierre, & Angélique Vichot. 2008. "La durabilité des bétons: bases scientifiques pour la formulation de bétons durables dans leur environnement."
159. P18-464, FD. 2014. Béton-Dispositions pour prévenir les phénomènes d'alcali-réaction. Association Française de Normalisation (AFNOR).



160. Pan, J W, Y T Feng, J T Wang, Q C Sun, C H Zhang, & D R J Owen. 2012. "Modeling of alkali-silica reaction in concrete: a review." *Frontiers of Structural and Civil Engineering* 6:1-18. doi: 10.1007/s11709-012-0141-2.
161. Patev, Robert C, Chandra Putcha, & Stuart D Foltz. 2005. "Methodology for risk analysis of dam gates and associated operating equipment using fault tree analysis."
162. Perruchot, Alain, Pierre Massard, & Jérôme Lombardi. 2003. "Composition et volume molaire apparent des gels Ca-Si, une approche expérimentale." *Comptes Rendus Geoscience* 335:951-958.
163. Pesavento, Francesco, Dariusz Gawin, Mateusz Wyrzykowski, Bernhard A Schrefler, & Luciano Simoni. 2012. "Modeling alkali-silica reaction in non-isothermal, partially saturated cement based materials." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 225-228:95-115. doi: 10.1016/j.cma.2012.02.019.
164. Phair, John W, Sergey N Tkachev, Murli H Manghnani, & Richard A Livingston. 2005. "Elastic and structural properties of alkaline-calcium silica hydrogels." *Journal of Materials Research* 20:344-349. doi: 10.1557/JMR.2005.0061.
165. Ponce, J M, & O R Batic. 2006. "Different manifestations of the alkali-silica reaction in concrete according to the reaction kinetics of the reactive aggregate." *Cement and Concrete Research* 36:1148-1156. doi: 10.1016/j.cemconres.2005.12.022.
166. Poole, A.B. 1992. *Alkali-silica reactivity mechanisms of gel formation and expansion*.
167. Poyet, S., A. Sellier, B. Capra, G. Foray, J. M. Torrenti, H. Cognon, & E. Bourdarot. 2007. "Chemical modelling of Alkali Silica reaction: Influence of the reactive aggregate size distribution." *Materials and Structures/Materiaux et Constructions* 40:229-239. doi: 10.1617/s11527-006-9139-3.
168. Poyet, Stéphane. 2003. Etude de la dégradation des ouvrages en béton atteints par la réaction alcali-silice - approche expérimentale et modélisation numérique des dégradations dans un environnement hydro-chemo-mécanique variable. Université de Marne la Vallée.
169. Prezzi, Monica, Paulo J M Monteiro, & Garrison Sposito. 1997. "Alkali-Silica Reaction, Part I: Use of the Double-Layer Theory to Explain the Behavior of Reaction-Product Gels." *ACI Materials Journal* 94. doi: 10.14359/280.
170. Prieur, Clémentine, & Stefano Tarantola. 2017. Variance-Based Sensitivity Analysis: Theory and Estimation Algorithms. In *Handbook of Uncertainty Quantification*. Cham: Springer International Publishing.
171. Rackwitz, Rüdiger. 2001. "Reliability analysis—a review and some perspectives." *Structural Safety* 23:365-395. doi: 10.1016/S0167-4730(02)00009-7.
172. Rackwitz, Rüdiger, & Bernd Flessler. 1978. "Structural reliability under combined random load sequences." *Computers & Structures* 9:489-494. doi: 10.1016/0045-7949(78)90046-9.
173. Riahi, Hassen. 2013. Analyse de structures à dimension stochastique élevée : application aux toitures bois sous sollicitation sismique.



174. Robert E. Melchers, André T. Beck. 2018. "Structural Reliability Analysis and Prediction, Third Edition." 506. doi: 10.1002/9781119266105.
175. Rosenblatt, Murray. 1952. "Remarks on a multivariate transformation." *The annals of mathematical statistics* 23:470-472.
176. Roussouly, Nicolas. 2011. Approche probabiliste pour la justification par analyse des structures spatiales.
177. Ruano, M V, J Ribes, A Seco, & J Ferrer. 2012. "An improved sampling strategy based on trajectory design for application of the Morris method to systems with many input factors." *Environmental Modelling & Software* 37:103-109. doi: 10.1016/j.envsoft.2012.03.008.
178. Rubinstein, Reuven Y, & Dirk P Kroese. 2011. "Simulation and the Monte Carlo Method." 401.
179. Saltelli, A, M Ratto, T Andres, F Campolongo, J Cariboni, D Gatelli, M Saisana, & S Tarantola. 2008. "Global {S}ensitivity {S}analysis. {T}he {P}rimer." xii+292.
180. Saltelli, Andrea, Stefano Tarantola, Francesca Campolongo, & Marco Ratto. 2004. "Sensitivity Analysis in Practice: a Guide to Assessing Scientific Models." *Journal of Chemical Information and Modeling* 53:232. doi: 10.1017/CBO9781107415324.004.
181. Sanchez, L F M, B Fournier, M Jolin, & J Bastien. 2014. "Evaluation of the stiffness damage test (SDT) as a tool for assessing damage in concrete due to ASR: test loading and output responses for concretes incorporating fine or coarse reactive aggregates." *Cement and concrete research* 56:213-229.
182. Sanchez, L F M, S Multon, A Sellier, M Cyr, B Fournier, & M Jolin. 2014. "Comparative study of a chemo-mechanical modeling for alkali silica reaction (ASR) with experimental evidences." *Construction and Building Materials* 72:301-315. doi: 10.1016/j.conbuildmat.2014.09.007.
183. Saouma, Victor. 2014. "Numerical Modeling of AAR." 326.
184. Saouma, Victor, & Luigi Perotti. 2006. "Constitutive Model for Alkali-Aggregate Reactions." *ACI Materials Journal* 103. doi: 10.14359/15853.
185. Sehgal, Chander K. 1996. "Design guidelines for spillway gates." *Journal of Hydraulic Engineering* 122:155-165.
186. Sellier, A, J P Bournazel, & A Mébarki. 1995. "Une modélisation de la réaction alcalis-granulat intégrant une description des phénomènes aléatoires locaux." *Materials and Structures* 28:373-383. doi: 10.1007/BF02473072.
187. Sellier, Alain. 1995. Modélisation probabiliste du comportement de matériaux et de structures en génie civil. Cachan, Ecole normale supérieure.
188. Sellier, Alain, Eric Bourdarot, Stéphane Multon, Martin Cyr, & Etienne Grimal. 2009. "Combination of Structural Monitoring and Laboratory Tests for Assessment of Alkali-Aggregate Reaction Swelling: Application to Gate Structure Dam." *ACI Materials Journal* 106. doi: 10.14359/56553.

189. Sellier, Alain, & Bruno Capra. 1997. "Modélisation physico-chimique de la réaction alcali-granulat: apport au calcul des structures dégradées." *Revue Française de Génie Civil* 1:445-481. doi: 10.1080/12795119.1997.9692135.
190. Sellier, Alain, Etienne Grimal, Stéphane Multon, & Éric Bourdarot. 2017. "Swelling Concrete in Dams and Hydraulic Structures: DSC 2017." 380.
191. Sellier, Alain, Stéphane Multon, Laurie Buffo-Lacarrière, Thierry Vidal, Xavier Bourbon, & Guillaume Camps. 2016. "Concrete creep modelling for structural applications: non-linearity, multi-axiality, hydration, temperature and drying effects." *Cement and Concrete Research* 79:301-315.
192. Shi, Zhongwen, Chongshi Gu, Xueqin Zheng, & Dong Qin. 2016. "Multiple failure modes analysis of the dam system by means of line sampling simulation." *Optik-International Journal for Light and Electron Optics* 127:4710-4715.
193. Shin, Jun Ho, Nam Yong Jee, Leslie J Struble, & R James Kirkpatrick. 2011. "Modeling Alkali-Silica Reaction Using Image Analysis and Finite Element Analysis." *Advanced Materials Research* 250-253:1050-1053. doi: 10.4028/[www.scientific.net/AMR.250-253.1050](http://www.scientific.net/AMR.250-253.1050).
194. Sims, Ian, & Alan B Poole. 2017. *Alkali-Aggregate Reaction in Concrete: A World Review*: CRC Press.
195. Sobol, I, & A Gresham. 1995. "On an alternative global sensitivity estimators." *Proceedings of SAMO*:40-42.
196. Sprung, S. 1975. "Influences on the alkali-aggregate reaction in concrete." 1975.
197. Stone, Mervyn. 1974. "Cross-validatory choice and assessment of statistical predictions." *Journal of the royal statistical society. Series B (Methodological)*:111-147.
198. Struble, Leslie J, & Sidney Diamond. 1981. "Swelling Properties of Synthetic Alkali Silica Gels." *Journal of the American Ceramic Society* 64:652-655. doi: 10.1111/j.1151-2916.1981.tb15864.x.
199. Sudret, Bruno. 2008. "Global sensitivity analysis using polynomial chaos expansions." *Reliability Engineering & System Safety* 93:964-979. doi: 10.1016/j.ress.2007.04.002.
200. Suwito, A, W Jin, Y Xi, & Christian Meyer. 2002. "A Mathematical Model for the Pessimism Size Effect of ASR in Concrete." *Concrete Science and Engineering* 4:23-34.
201. Swamy, R N. 2002. "The Alkali-Silica Reaction in Concrete." 353.
202. Tatang, Menner A, Wenwei Pan, Ronald G Prinn, & Gregory J McRae. 1997. "An efficient method for parametric uncertainty analysis of numerical geophysical models." *Journal of Geophysical Research: Atmospheres* 102:21925-21932. doi: 10.1029/97JD01654.
203. Taylor, Harry F W. 1997. "Cement chemistry."
204. Thomas, M D A, B Fournier, & K J Folliard. 2013. "Alkali-Aggregate Reactivity (AAR) Facts Book."

205. Thomas, Michael D A, B Fournier, K.J. Folliard, & Y.A. Resendez. 2012. "FHWA-HIF-12-046 Alkali-Silica Reactivity Surveying and Tracking Guidelines."
206. Thompson, GA, RG Charlwood, RR Steele, & D Curtis. 1994. *Mactaquac generating station intake and spillway remedial measures*. Durban.
207. Ulm, F, O Coussy, L Kefei, & C Larive. 2000. "Thermo-Chemo-Mechanics of ASR Expansion in Concrete Structures." *Journal of Engineering Mechanics* 126:233-242. doi: 10.1061/(ASCE)0733-9399(2000)126:3(233).
208. Wald, David Michael. 2017. ASR expansion behavior in reinforced concrete: experimentation and numerical modeling for practical application.
209. Wang, H, & J E Gillott. 1991. "Mechanism of alkali-silica reaction and the significance of calcium hydroxide." *Cement and Concrete Research* 21:647-654. doi: 10.1016/0008-8846(91)90115-X.
210. Westberg, Marie. 2010. "Reliability-based assessment of concrete dam stability."
211. Westberg Wilde, Marie, & Fredrik Johansson. 2012. "System reliability of concrete dams with respect to foundation stability: application to a spillway." *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering* 139:308-319.
212. Wiener, Norbert. 1938. "The Homogeneous Chaos." *American Journal of Mathematics* 60:897. doi: 10.2307/2371268.
213. Wigum, Børge J, L T Pedersen, Bent Grelk, & Jan Lindgård. 2006. "State-of-the art report: Key parameters influencing the alkali aggregate reaction."
214. Xiu, Dongbin, & George Em Karniadakis. 2003. "A new stochastic approach to transient heat conduction modeling with uncertainty." *International Journal of Heat and Mass Transfer* 46:4681-4693. doi: 10.1016/S0017-9310(03)00299-0.
215. Zhang, Chengzhi, Aiqin Wang, Mingshu Tang, Bingqin Wu, & Ningsheng Zhang. 1999. "Influence of aggregate size and aggregate size grading on ASR expansion." *Cement and Concrete Research* 29:1393-1396. doi: 10.1016/S0008-8846(99)00099-X.

## Annexes

## Annexe A

### Informations complémentaires sur la réaction alcali-granulat



#### A. 1. OUTILS D'INVESTIGATION POUR LE DIAGNOSTIC ET LE PRONOSTIC DE RAS DANS LES STRUCTURES 196



## A.1. Outils d'investigation pour le diagnostic et le pronostic de RAS dans les structures

Tableau A.1: Outils d'investigation pour le diagnostic et le pronostic de RAS dans les structures en béton, adapté de [Fournier *et al.* 2010]

Essais /inspection	Objectif principal	Diagnostic	Prédiction
Inspection du site (enquête sur les conditions)	<ul style="list-style-type: none"> <li>Évaluer la nature et l'étendue des désordres, et les risques relatifs à la structure.</li> <li>Intégrité et sécurité publique</li> <li>Déterminer les conditions d'exposition</li> <li>Choisir les sites d'échantillonnage et de</li> </ul>	Important	Exploitable si disponible
Documentations des structures en béton inspectées.	Recueillir et examiner les documents disponibles relatifs à la conception, la construction, l'exploitation et la maintenance	Important	Si disponible
Mesure initiale et périodique des fissures (Indice de Fissuration)	<ul style="list-style-type: none"> <li>Évaluer le niveau de détérioration et de gonflement déjà atteint</li> <li>Évaluer le taux actuel de gonflement</li> <li>Évaluer le potentiel de gonflement résiduel</li> </ul>	Important	Si possible
Examen pétrographique			
• Description macroscopique	<ul style="list-style-type: none"> <li>Décrire l'état général des carottes de béton</li> </ul>	Important	Si disponible
Examen microscopique en utilisant des dalles polies, sections minces (imprégnée ou non), morceaux de béton	<ul style="list-style-type: none"> <li>Identifier types &amp; distribution de roches réactives</li> <li>Identifier la présence et la distribution de produits de RAS</li> <li>Identifier les sites de gonflement de la</li> </ul>	Important	Si disponible
Analyse pétrographique quantitative des dalles	Quantifier l'étendue des dommages dus à la RAS (fissuration, gel), voir leur progression	Si possible	Si disponible
Essais mécaniques			
• Essais de compression et de traction par	<ul style="list-style-type: none"> <li>Évaluer l'état général du béton</li> <li>Évaluer les propriétés structurelles des</li> </ul>	Si possible	
• Résistances à la traction, à la flexion et	<ul style="list-style-type: none"> <li>Détecter une RAS éventuelle</li> <li>Évaluer les propriétés structurelles des</li> </ul>	Si possible	
• Test d'endommagement (de rigidité)	<ul style="list-style-type: none"> <li>Évaluer l'endommagement dû à la RAS</li> <li>Évaluer le niveau de gonflement déjà</li> </ul>	Important	
Essai gonflement carottes			
• Eprouvettes à 38°C, H.R > 95%	<ul style="list-style-type: none"> <li>Etablir la présence de gonflements délétères</li> <li>Évaluer le taux actuel de gonflement</li> </ul>	Si possible	Important
Eprouvettes dans 1N NaOH à 38°C	<ul style="list-style-type: none"> <li>Identifier les granulats réactifs</li> <li>Évaluer la réactivité résiduelle des granulats</li> </ul>	Si disponible	Si possible
Détermination de la teneur en alcali soluble	<ul style="list-style-type: none"> <li>Évaluer les sources potentielles d'alcalins</li> </ul>	Si possible	Si possible
Surveillance des gonflements et des déplacements	<ul style="list-style-type: none"> <li>Etablir la présence de gonflements délétères</li> <li>Évaluer le taux actuel de gonflement</li> </ul>	Si possible	Important
Evaluation <i>in situ</i> des contraintes internes et de	<ul style="list-style-type: none"> <li>Contraintes dans le béton et les armatures</li> <li>Dommages et intégrité de la structure</li> </ul>	Si possible	
Modélisation numérique de la RAG	<ul style="list-style-type: none"> <li>Etablir la présence de gonflements délétères</li> <li>Dommages et intégrité de la structure</li> <li>Prévision du gonflement et la stabilité</li> </ul>	Si possible	Si possible



<b>B. 1.</b>	<b>ANALYSES DE SENSIBILITE A 29 °C.....</b>	<b>198</b>
B.1.1	VOLUME DE GEL EN FONCTION DU TEMPS $V_G(T)$ .....	198
B.1.2	GONFLEMENT VOLUMIQUE EN FONCTION DU TEMPS $E_V(T)$ .....	199
B.1.3	VITESSE DE GONFLEMENT VOLUMIQUE EN FONCTION DU TEMPS $E'_V(T)$ .....	200
B.1.4	DIVERS POURCENTAGES DU GONFLEMENT MAXIMAL $\%E_{VMAX}$ .....	201
B.1.5	TEMPS POUR ATTEINDRE DIVERS POURCENTAGES DU GONFLEMENT MAXIMAL $T_{\%E_{VMAX}}$ .....	202
<b>B. 2.</b>	<b>ANALYSES DE SENSIBILITE A 10 ° C.....</b>	<b>203</b>
B.2.1	VOLUME DE GEL EN FONCTION DU TEMPS $V_G(T)$ .....	203
B.2.2	GONFLEMENT VOLUMIQUE EN FONCTION DU TEMPS $E_V(T)$ .....	204
B.2.3	VITESSE DE GONFLEMENT VOLUMIQUE EN FONCTION DU TEMPS $E'_V(T)$ .....	205
B.2.4	DIVERS POURCENTAGES DU GONFLEMENT MAXIMAL $\%E_{VMAX}$ .....	206
B.2.5	TEMPS POUR ATTEINDRE DIVERS POURCENTAGES DU GONFLEMENT MAXIMAL $T_{\%E_{VMAX}}$ .....	207
<b>B. 3.</b>	<b>ANALYSES DE SENSIBILITE A LA TEMPERATURE VARIABLE DE SONG LOULOU .....</b>	<b>208</b>
B.3.1	VOLUME DE GEL EN FONCTION DU TEMPS $V_G(T)$ .....	208
B.3.2	GONFLEMENT VOLUMIQUE EN FONCTION DU TEMPS $E_V(T)$ .....	209
B.3.3	VITESSE DE GONFLEMENT VOLUMIQUE EN FONCTION DU TEMPS $E'_V(T)$ .....	210
B.3.4	DIVERS POURCENTAGES DU GONFLEMENT MAXIMAL $\%E_{VMAX}$ .....	211
B.3.5	TEMPS POUR ATTEINDRE DIVERS POURCENTAGES DU GONFLEMENT MAXIMAL $T_{\%E_{VMAX}}$ .....	212



## B.1. Analyses de sensibilité à 29 °C

### B.1.1. Volume de gel en fonction du temps $V_g(t)$

Cette analyse a été réalisée sur le volume de gel créé pour 14 dates différentes couvrant une période de 100 ans. La Figure B. 1 présente les résultats obtenus pour chacune des 14 dates. La Figure B. 2 quant à elle dresse le bilan de sensibilité sur l'ensemble des 14 dates. Les 5 variables de forte influence (en dessous du quantile 90%) sont celles dont les barres d'histogramme ont un motif de couleur noire.

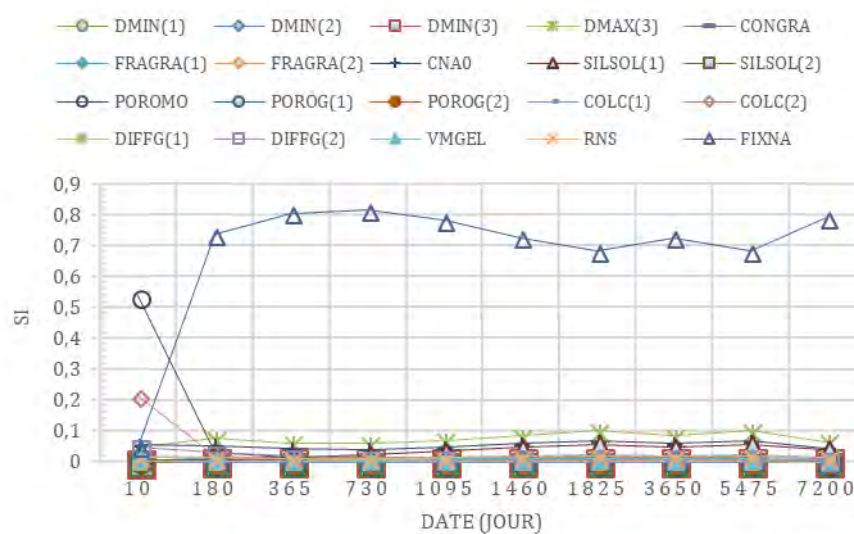


Figure B. 1: Classement des variables en fonctions de leur impact sur  $V_g(t)$  diverses échéances à 29° C

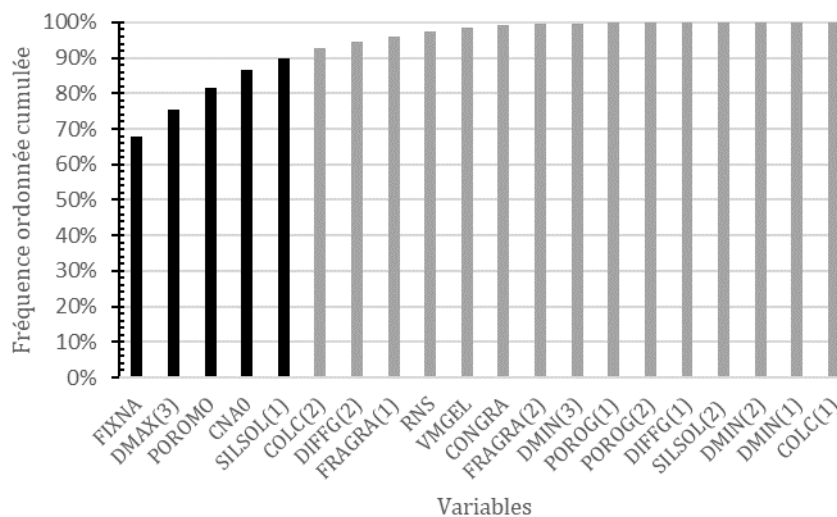


Figure B. 2: Fréquence ordonnée cumulée sur la somme des indices globaux de  $V_g(t)$  sur diverses échéances à 29° C

### B.1.2. Gonflement volumique en fonction du temps $\varepsilon_v(t)$

Cette analyse a été réalisée sur le gonflement volumique pour 14 dates différentes couvrant une période de 100 ans. La Figure B. 3 présente les résultats obtenus pour chacune des 14 dates. La Figure B. 4 quant à elle dresse le bilan de sensibilité sur l'ensemble des 14 dates. Les 4 variables de forte influence (en dessous du quantile 90%) sont celles dont les barres d'histogramme ont un motif de couleur noire.

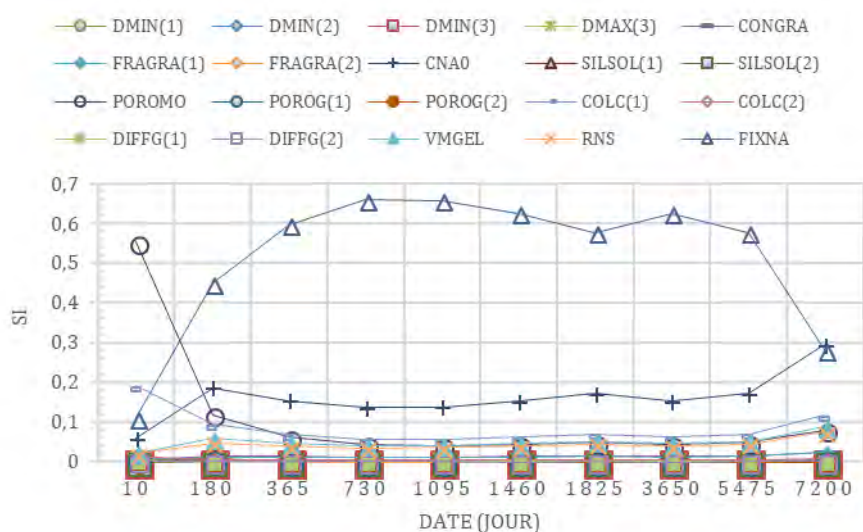


Figure B. 3: Classement des variables en fonctions de leur impact sur  $\varepsilon_v(t)$  diverses échéances à 29° C

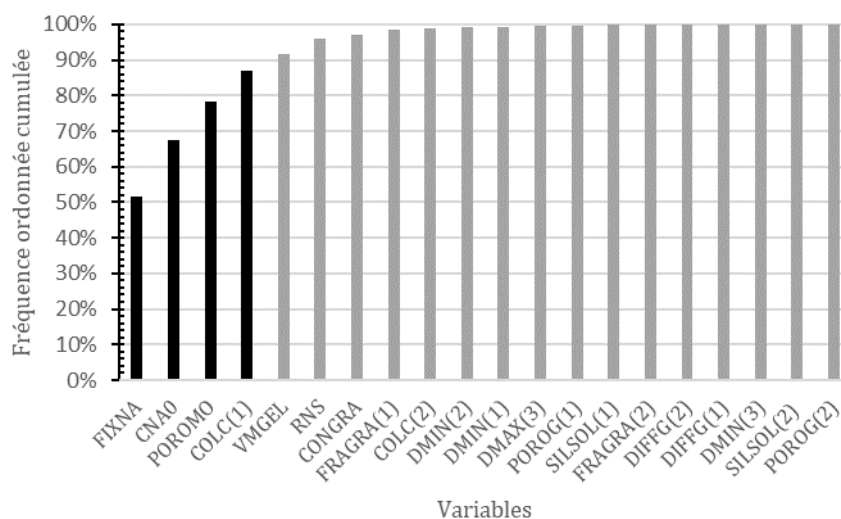


Figure B. 4: Fréquence ordonnée cumulée sur la somme des indices globaux de  $\varepsilon_v(t)$  sur diverses échéances à 29° C

### B.1.3. Vitesse de Gonflement volumique en fonction du temps $\varepsilon'_v(t)$

Cette analyse a été réalisée sur la vitesse de gonflement pour 14 dates différentes couvrant une période de 100 ans. La Figure B. 5 présente les résultats obtenus pour chacune des 14 dates. La Figure B. 6 quant à elle dresse le bilan de sensibilité sur l'ensemble des 14 dates. Le coefficient de fixation des alcalins (FIXNA) dont la barre d'histogramme est noire, est l'unique variable de forte influence avec 84%.

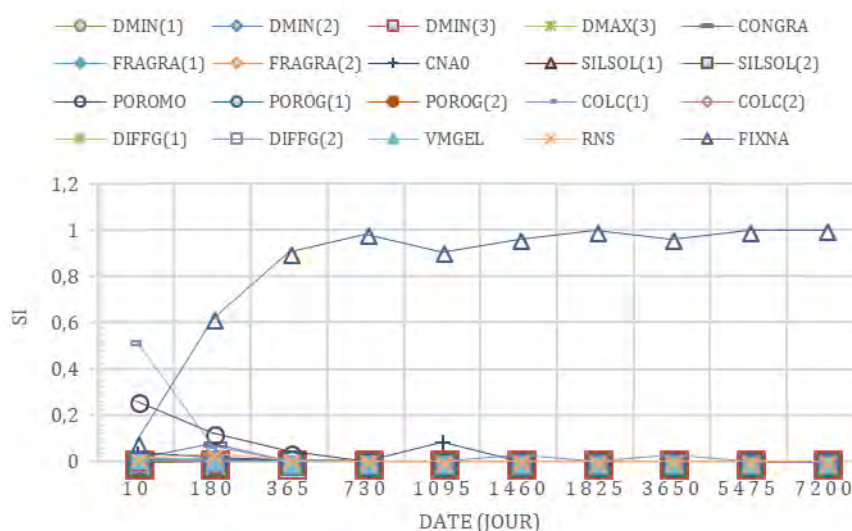


Figure B. 5: Classement des variables en fonctions de leur impact sur  $\varepsilon'_v(t)$  à diverses échéances à 29 ° C

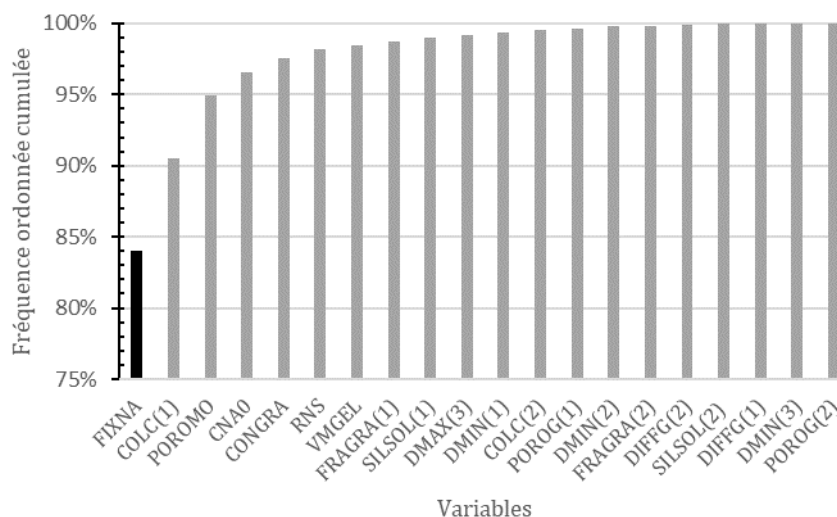


Figure B. 6: Fréquence ordonnée cumulée sur la somme des indices globaux de  $\varepsilon'_v(t)$  sur diverses échéances à 29° C

#### B.1.4 Divers pourcentages du gonflement maximal $\% \epsilon_{VMax}$

Cette analyse a été réalisée pour 7 pourcentages différents de gonflement maximal, à savoir : 5, 25, 50, 75, 90, 95, et 100%. La Figure B. 7 présente les résultats obtenus pour chacun des 7 pourcentages. La Figure B. 8 quant à elle dresse le bilan de sensibilité sur l'ensemble des 7 pourcentages. Les 8 variables de forte influence (en dessous du quantile 90%) sont celles dont les barres d'histogramme ont un motif de couleur noire

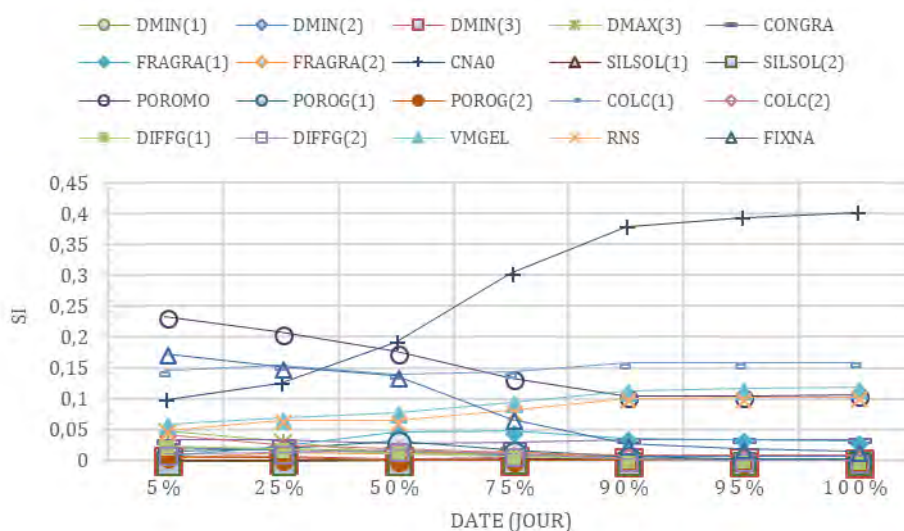


Figure B. 7: Classement des variables en fonctions de leur impact sur divers pourcentages de  $\% \epsilon_{VMax}$  à 29°C

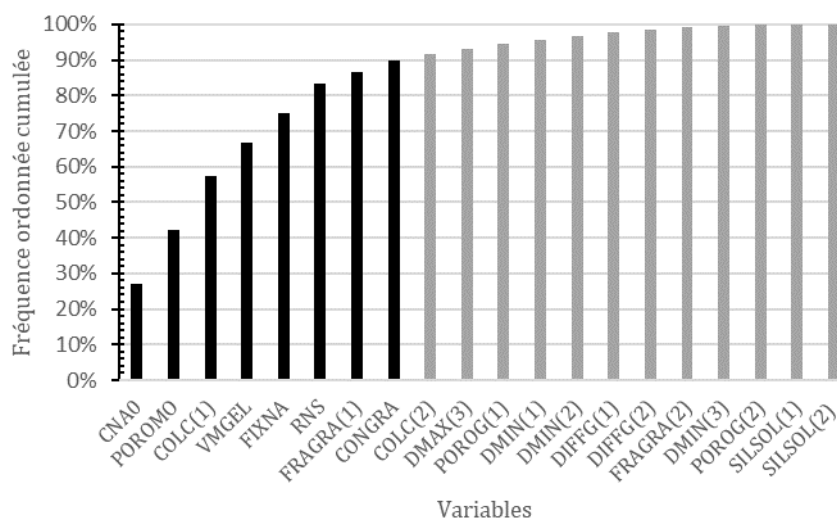


Figure B. 8: Fréquence ordonnée cumulée sur la somme des indices globaux de  $\% \epsilon_{VMax}$  sur divers pourcentages à 29°C

### B.1.5 Temps pour atteindre divers pourcentages du gonflement maximal $t_{\% \epsilon VMax}$

La grandeur objet de cette analyse est le temps nécessaire pour atteindre 7 pourcentages différents de gonflement maximal, à savoir : 5, 25, 50, 75, 90, 95, et 100%. La Figure B. 9 présente les résultats obtenus pour chacun des 7 pourcentages. La Figure B. 10 quant à elle dresse le bilan de sensibilité sur l'ensemble des 7 pourcentages. La concentration initiale en alcalins CNA0 dont la barre d'histogramme est noire, est l'unique variable de forte influence avec 60.4%. Le coefficient de fixation des alcalins (FIXNA) a également un grand poids.

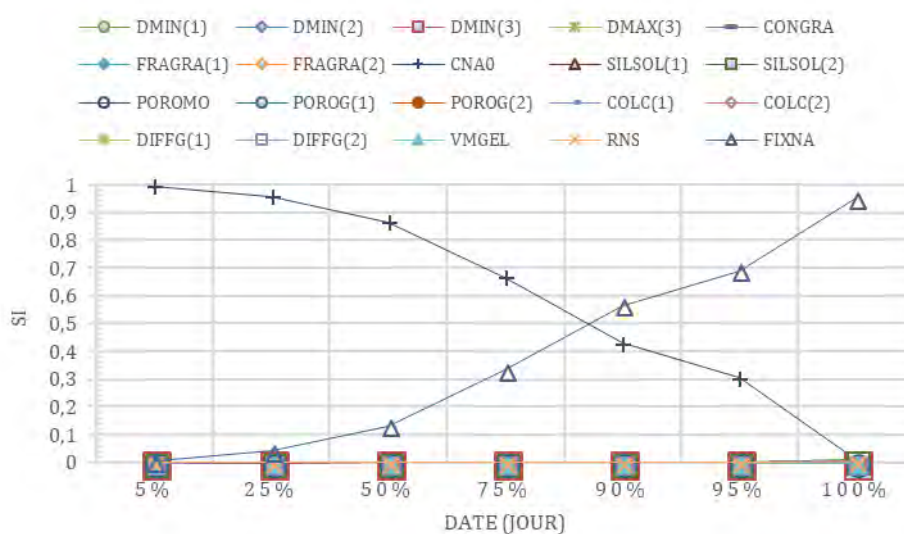


Figure B. 9: Classement des variables en fonctions de leur impact sur le temps pour atteindre divers pourcentages  $t_{\% \epsilon VMax}$  à 29° C

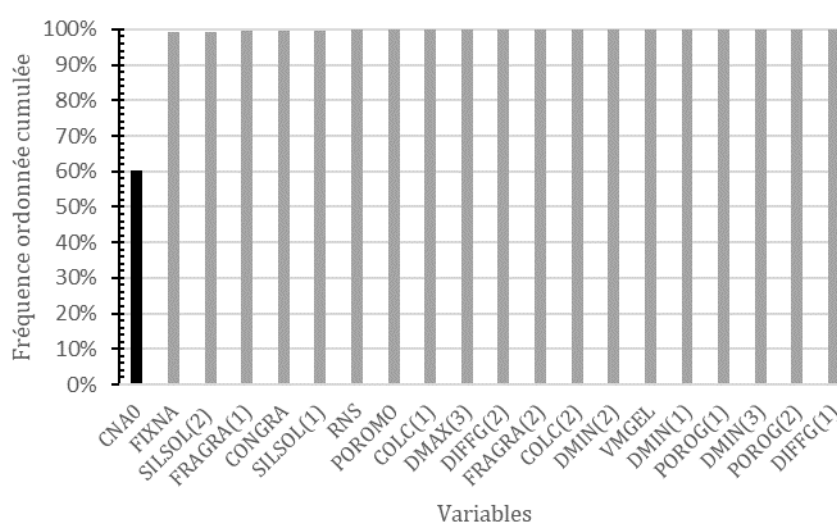


Figure B. 10: Fréquence ordonnée cumulée sur la somme des indices globaux du temps pour atteindre divers pourcentages  $t_{\% \epsilon VMax}$  à 29° C



## B.2. Analyses de sensibilité à 10 ° C

### B.2.1. Volume de gel en fonction du temps $V_g(t)$

Cette analyse a été réalisée sur le volume de gel créé pour 14 dates différentes couvrant une période de 100 ans. La Figure B. 11 présente les résultats obtenus pour chacune des 14 dates. La Figure B. 12 quant à elle dresse le bilan de sensibilité sur l'ensemble des 14 dates. Les 8 variables de forte influence (en dessous du quantile 90%) sont celles dont les barres d'historique ont un motif de couleur noire.

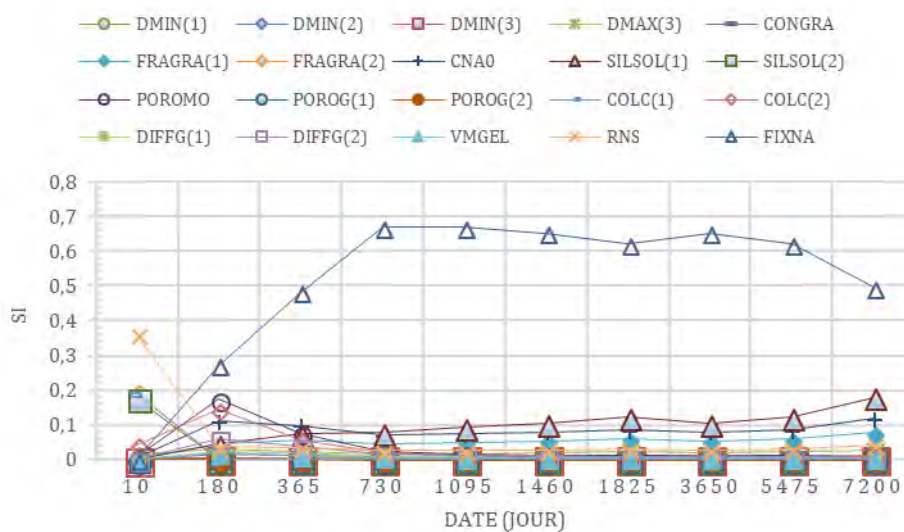


Figure B. 11: Classement des variables en fonction de leur impact sur  $V_g(t)$  à diverses échéances à 10°C

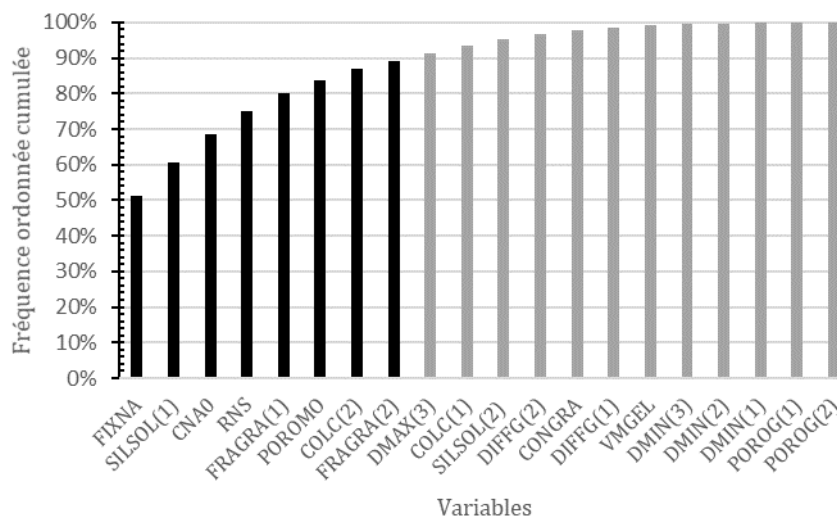


Figure B. 12: Fréquence ordonnée cumulée sur la somme des indices globaux de  $V_g(t)$  sur diverses échéances à 10°C

### B.2.2. Gonflement volumique en fonction du temps $\varepsilon_v(t)$

Cette analyse a été réalisée sur le gonflement volumique pour 14 dates différentes couvrant une période de 100 ans. La Figure B. 13 présente les résultats obtenus pour chacune des 14 dates. La Figure B. 14 quant à elle dresse le bilan de sensibilité sur l'ensemble des 14 dates. Les 5 variables de forte influence (en dessous du quantile 90%) sont celles dont les barres d'histogramme ont un motif de couleur noire.

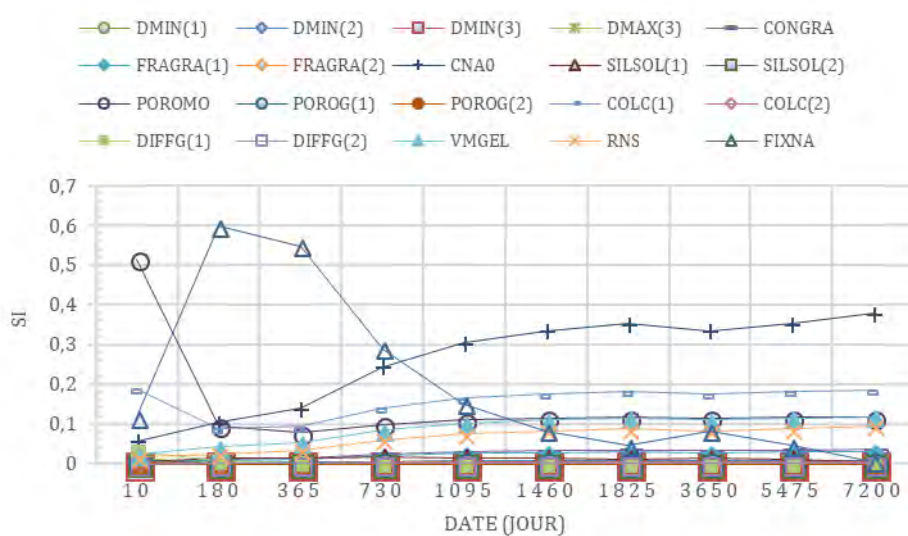


Figure B. 13: Classement des variables en fonction de leur impact sur  $\varepsilon_v(t)$  à diverses échéances à 10 °C

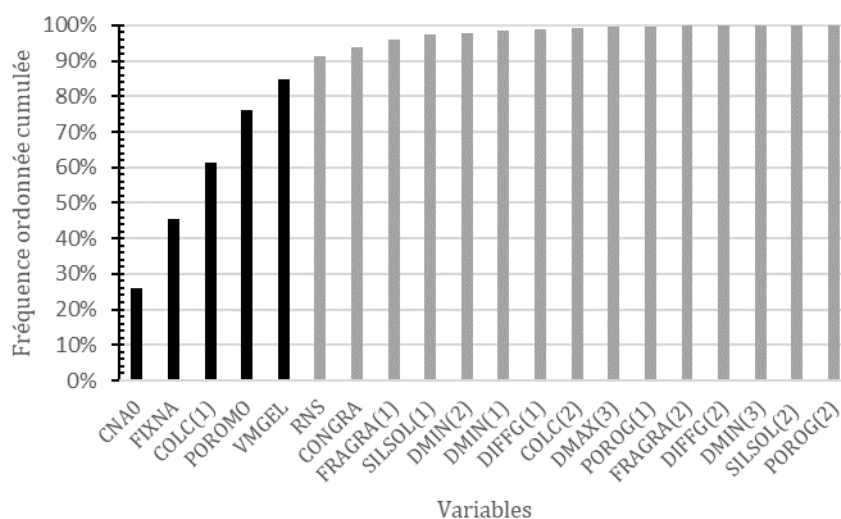


Figure B. 14: Fréquence ordonnée cumulée sur la somme des indices globaux de  $\varepsilon_v(t)$  sur diverses échéances à 10 °C



### B.2.3. Vitesse de Gonflement volumique en fonction du temps $\varepsilon_v(t)$

Cette analyse a été réalisée sur la vitesse de gonflement pour 14 dates différentes couvrant une période de 100 ans. La Figure B. 15 présente les résultats obtenus pour chacune des 14 dates. La Figure B. 16 quant à elle dresse le bilan de sensibilité sur l'ensemble des 14 dates. Les 5 variables de forte influence (en dessous du quantile 90%) sont celles dont les barres d'historgramme ont un motif de couleur noire.

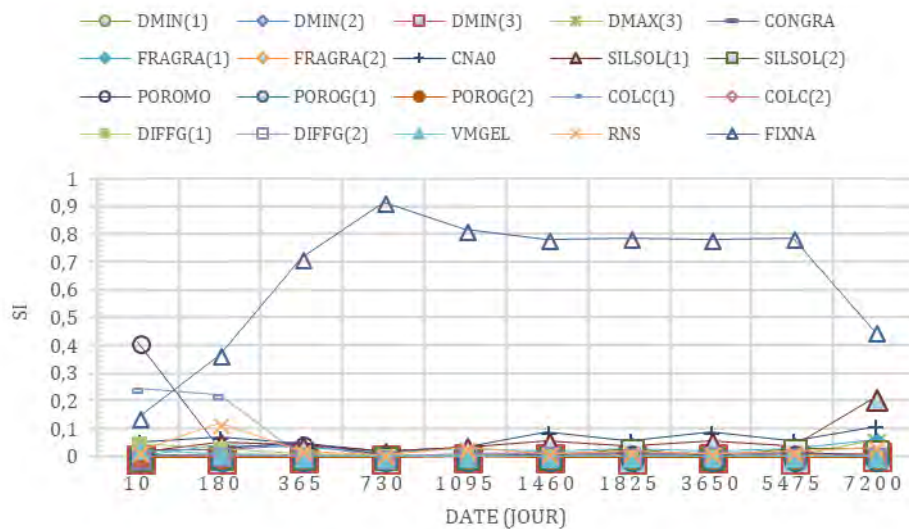


Figure B. 15: Classement des variables en fonctions de leur impact sur  $\varepsilon_v(t)$  à diverses échéances à 10° C

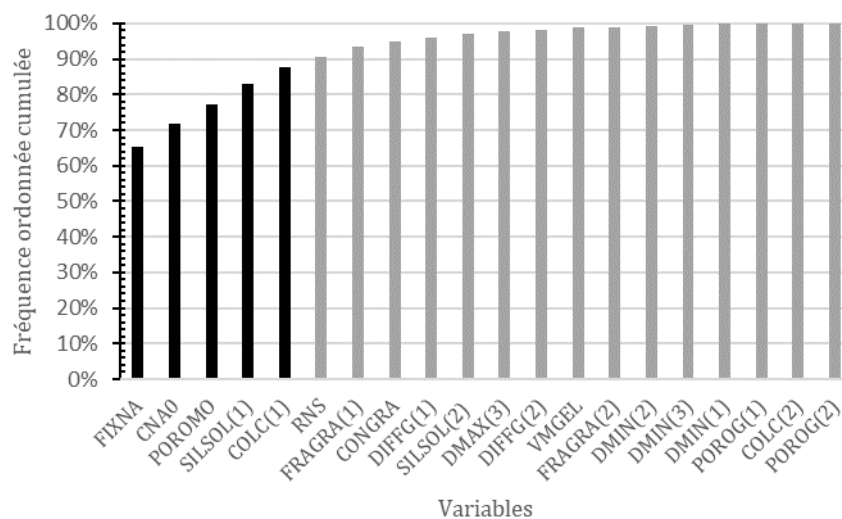


Figure B. 16: Fréquence ordonnée cumulée sur la somme des indices globaux de  $\varepsilon_v(t)$  sur diverses échéances à 10° C

### B.2.4. Divers pourcentages du gonflement maximal $\% \epsilon_{VMax}$

Cette analyse a été réalisée pour 7 pourcentages différents de gonflement maximal, à savoir : 5, 25, 50, 75, 90, 95, et 100%. La Figure B. 17 présente les résultats obtenus pour chacun des 7 pourcentages. La Figure B. 18 quant à elle dresse le bilan de sensibilité sur l'ensemble des 7 pourcentages. Les 8 variables de forte influence (en dessous du quantile 90%) sont celles dont les barres d'histogramme ont un motif de couleur noire.

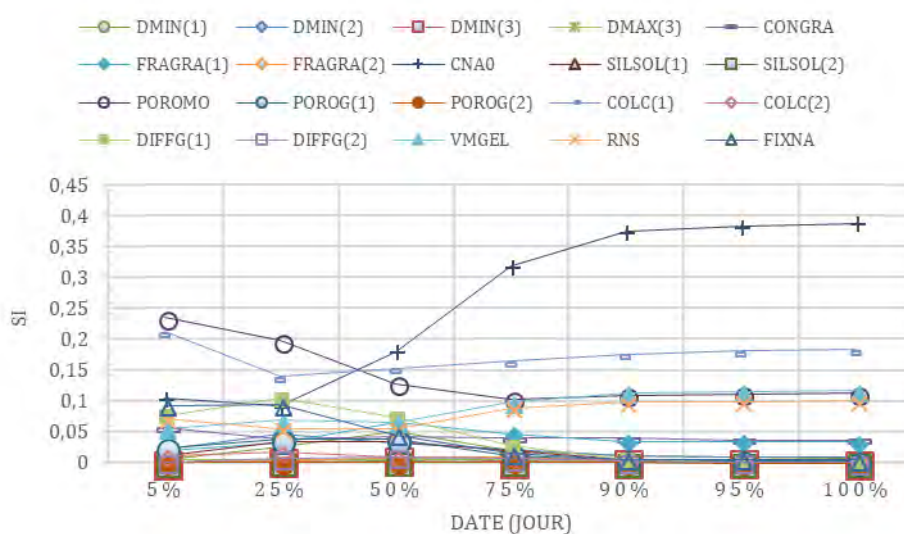


Figure B. 17: Classement des variables en fonctions de leur impact sur divers pourcentages de  $\% \epsilon_{VMax}$  à 10°C

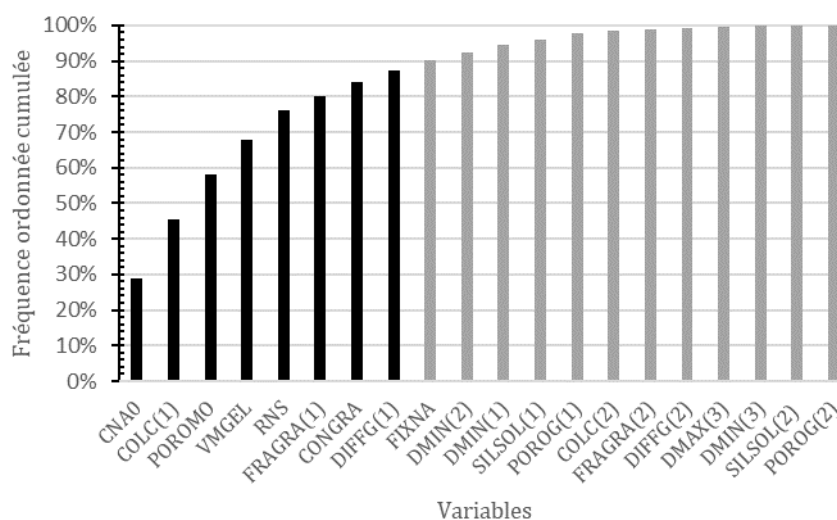


Figure B. 18: Fréquence ordonnée cumulée sur la somme des indices globaux de  $\% \epsilon_{VMax}$  sur divers pourcentages à 10°C

### B.2.5. Temps pour atteindre divers pourcentages du gonflement maximal $t_{\% \epsilon_{VM_{Max}}}$

La grandeur objet de cette analyse est le temps nécessaire pour atteindre 7 pourcentages différents de gonflement maximal, à savoir : 5, 25, 50, 75, 90, 95, et 100%. La Figure B. 19 présente les résultats obtenus pour chacun des 7 pourcentages. La Figure B. 20 quant à elle dresse le bilan de sensibilité sur l'ensemble des 7 pourcentages. Les 3 variables de forte influence (en dessous du quantile 90%) sont celles dont les barres d'histogramme ont un motif de couleur noire.

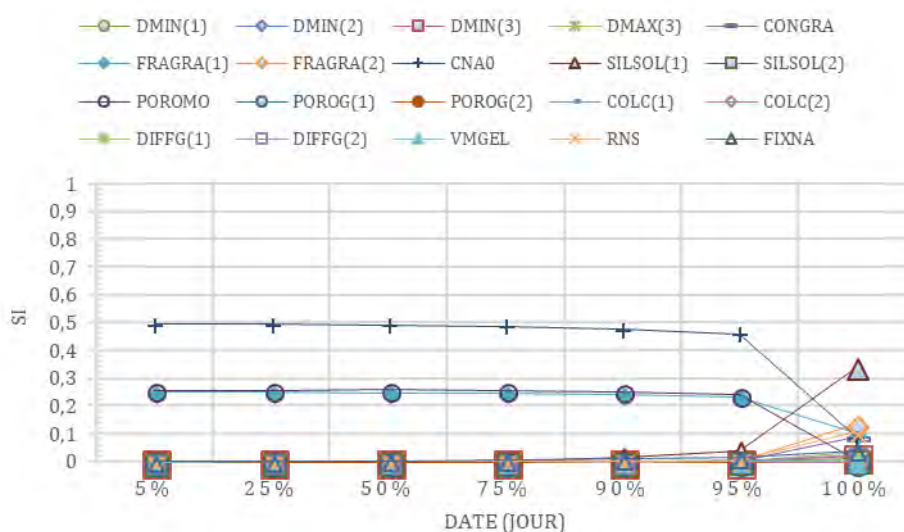


Figure B. 19: Classement des variables en fonctions de leur impact sur le temps pour atteindre divers pourcentages  $t_{\% \epsilon_{VM_{Max}}}$  à 10° C

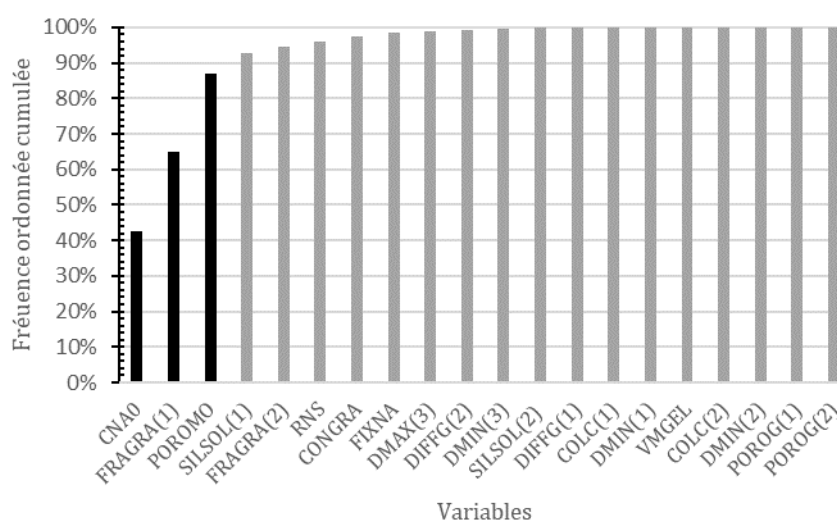


Figure B. 20: Fréquence ordonnée cumulée sur la somme des indices globaux du temps pour atteindre divers pourcentages  $t_{\% \epsilon_{VM_{Max}}}$  à 10° C

### B.3. Analyses de sensibilité à la température variable de Song Loulou

#### B.3.1. Volume de gel en fonction du temps $V_g(t)$

Cette analyse a été réalisée sur le volume de gel créé pour 14 dates différentes couvrant une période de 100 ans. La Figure B. 21 présente les résultats obtenus pour chacune des 14 dates. La Figure B. 22 quant à elle dresse le bilan de sensibilité sur l'ensemble des 14 dates. Les 5 variables de forte influence (en dessous du quantile 90%) sont celles dont les barres d'historgramme ont un motif de couleur noire.

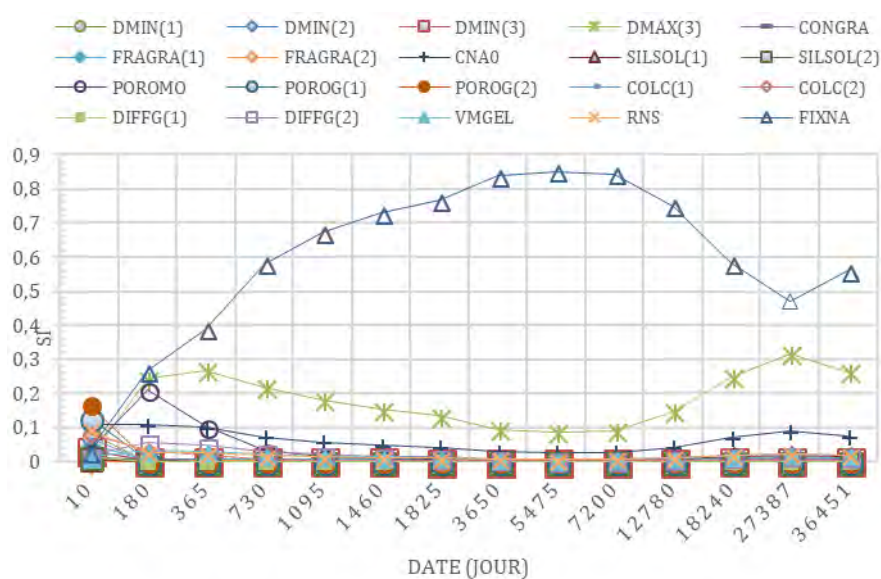


Figure B. 21: Classement des variables en fonctions de leur impact sur  $V_g(t)$  diverses échéances à la température variable de Song Loulou

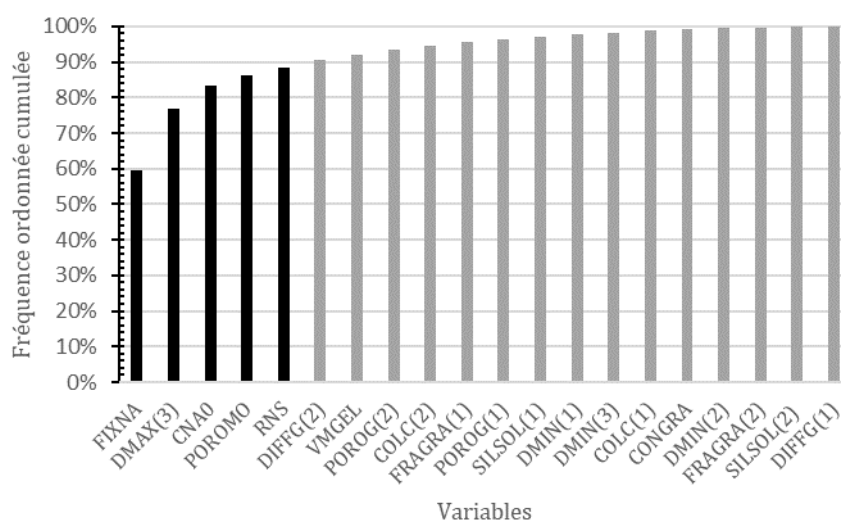


Figure B. 22: Fréquence ordonnée cumulée sur la somme des indices globaux de  $V_g(t)$  sur diverses échéances à la température variable de Song Loulou

### B.3.2. Gonflement volumique en fonction du temps $\varepsilon_v(t)$

Cette analyse a été réalisée sur le gonflement volumique pour 14 dates différentes couvrant une période de 100 ans. La Figure B. 23 présente les résultats obtenus pour chacune des 14 dates. La Figure B. 24 quant à elle dresse le bilan de sensibilité sur l'ensemble des 14 dates. Les 5 variables de forte influence (en dessous du quantile 90%) sont celles dont les barres d'histogramme ont un motif de couleur noire.

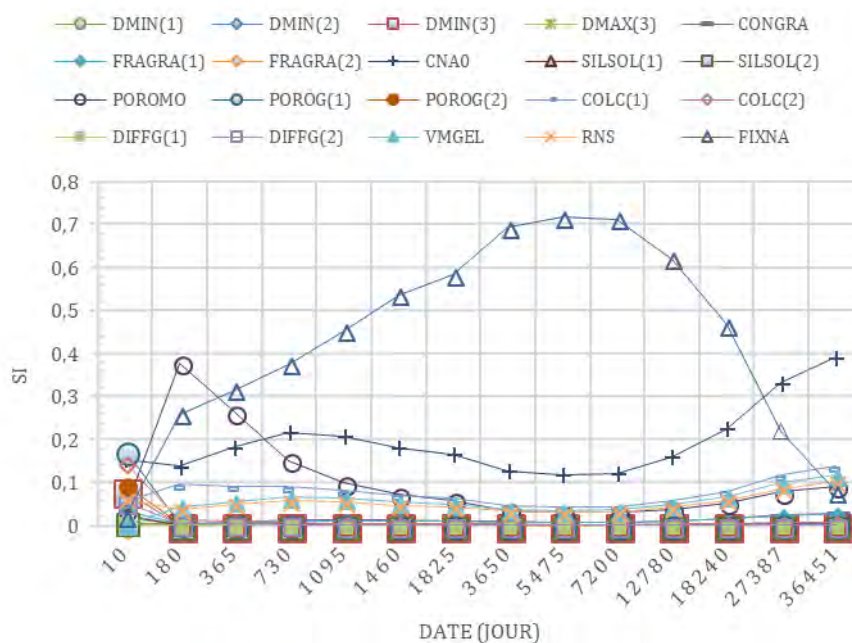


Figure B. 23: Classement des variables en fonctions de leur impact sur  $\varepsilon_v(t)$  diverses échéances à la température variable de Song Loulou

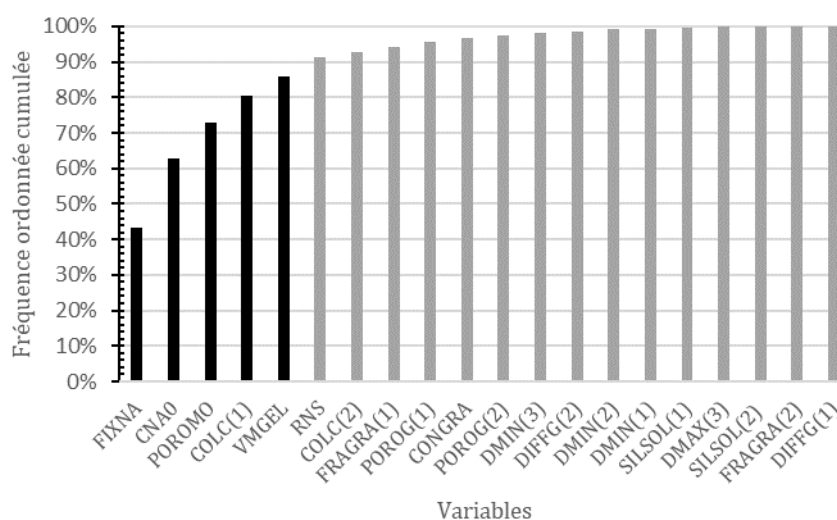


Figure B. 24: Fréquence ordonnée cumulée sur la somme des indices globaux de  $\varepsilon_v(t)$  sur diverses échéances à la température variable de Song Loulou



### B.3.3. Vitesse de Gonflement volumique en fonction du temps $\varepsilon_v(t)$

Cette analyse a été réalisée sur la vitesse de gonflement pour 14 dates différentes couvrant une période de 100 ans. La Figure B. 25 présente les résultats obtenus pour chacune des 14 dates. La Figure B. 26 quant à elle dresse le bilan de sensibilité sur l'ensemble des 14 dates. Les 5 variables de forte influence (en dessous du quantile 90%) sont celles dont les barres d'histogramme ont un motif de couleur noire.

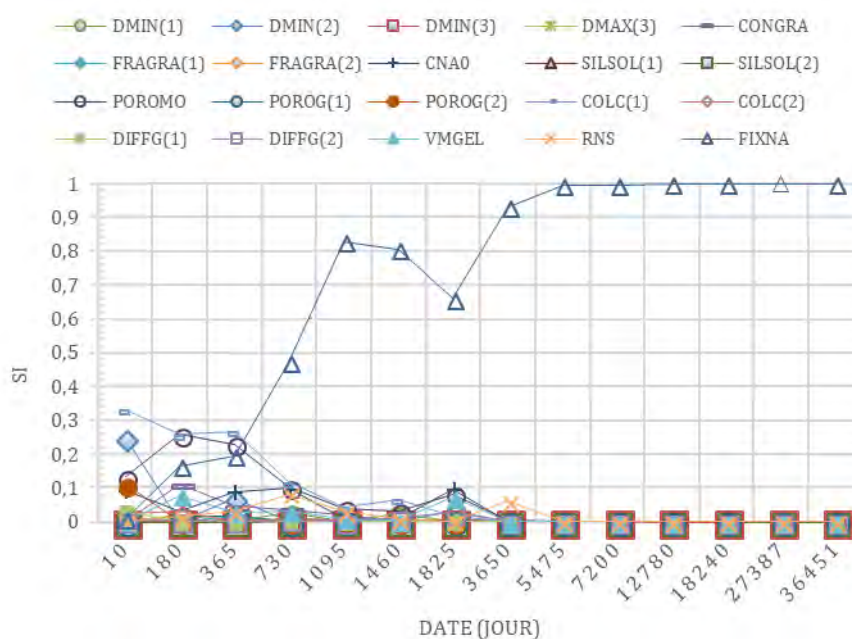


Figure B. 25: Classement des variables en fonction de leur impact sur  $\varepsilon_v(t)$  à diverses échéances à la température variable de Song Loulou

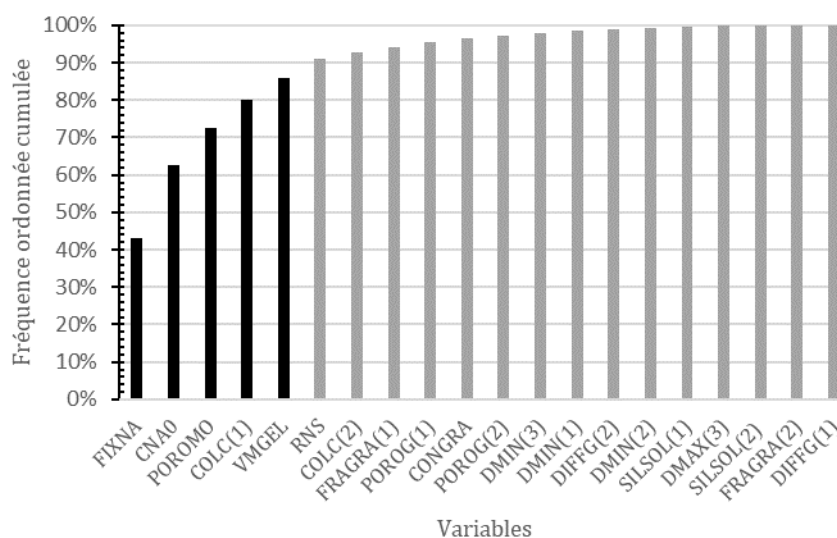


Figure B. 26: Fréquence ordonnée cumulée sur la somme des indices globaux de  $\varepsilon_v(t)$  sur diverses échéances à la température variable de Song Loulou

### B.3.4. Divers pourcentages du gonflement maximal $\% \epsilon_{VMax}$

Cette analyse a été réalisée pour 7 pourcentages différents de gonflement maximal, à savoir : 5, 25, 50, 75, 90, 95, et 100%. La Figure B. 27 présente les résultats obtenus pour chacun des 7 pourcentages. La Figure B. 28 quant à elle dresse le bilan de sensibilité sur l'ensemble des 7 pourcentages. Les 8 variables de forte influence (en dessous du quantile 90%) sont celles dont les barres d'histogramme ont un motif de couleur noire.

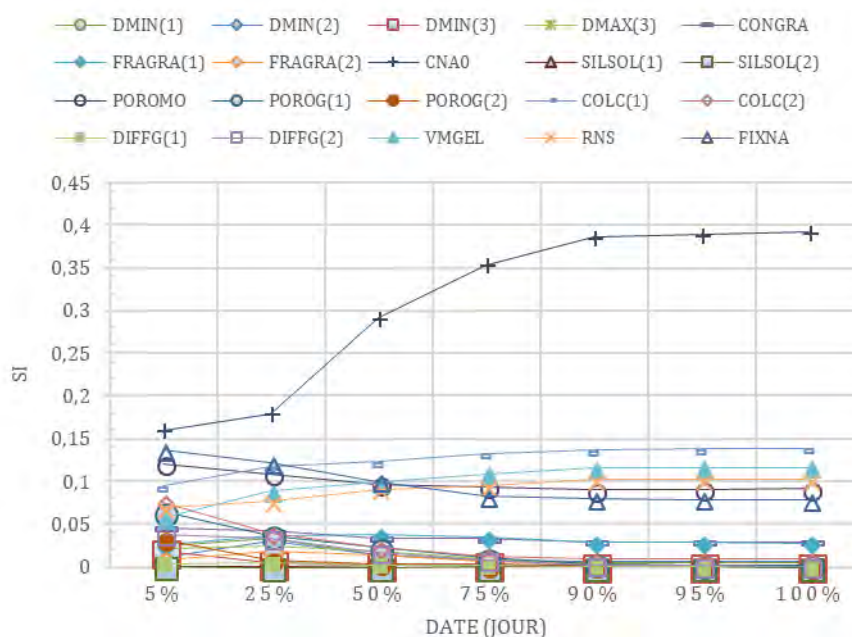


Figure B. 27: Classement des variables en fonctions de leur impact sur divers pourcentages de  $\% \epsilon_{VMax}$  à la température variable de Song Loulou

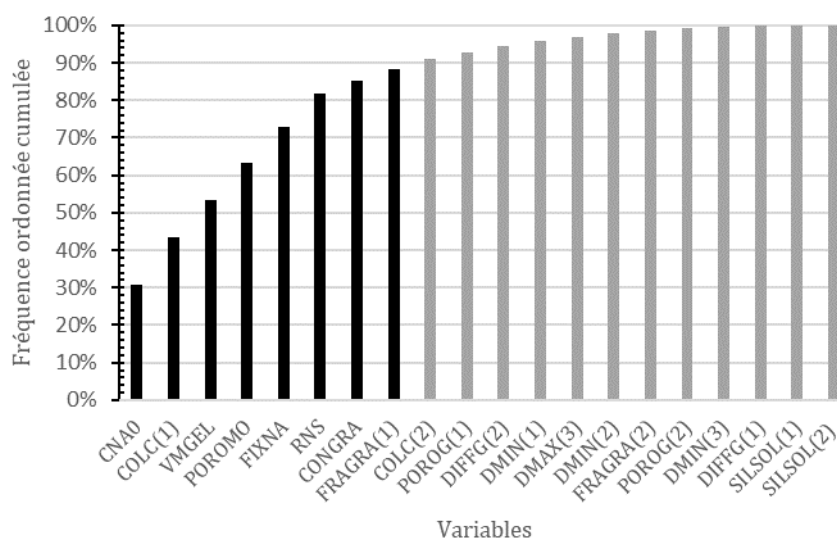


Figure B. 28: Fréquence ordonnée cumulée sur la somme des indices globaux de  $\% \epsilon_{VMax}$  sur divers pourcentages à la température variable de Song Loulou



### B.3.5. Temps pour atteindre divers pourcentages du gonflement maximal $t_{\%VM_{Max}}$

La grandeur objet de cette analyse est le temps nécessaire pour atteindre 7 pourcentages différents de gonflement maximal, à savoir : 5, 25, 50, 75, 90, 95, et 100%. La Figure B. 29 présente les résultats obtenus pour chacun des 7 pourcentages. La Figure B. 30 quant à elle dresse le bilan de sensibilité sur l'ensemble des 7 pourcentages. Le coefficient de fixation des alcalins (FIXNA) dont la barre d'histogramme est noire, est l'unique variable de forte influence avec 99.5%.

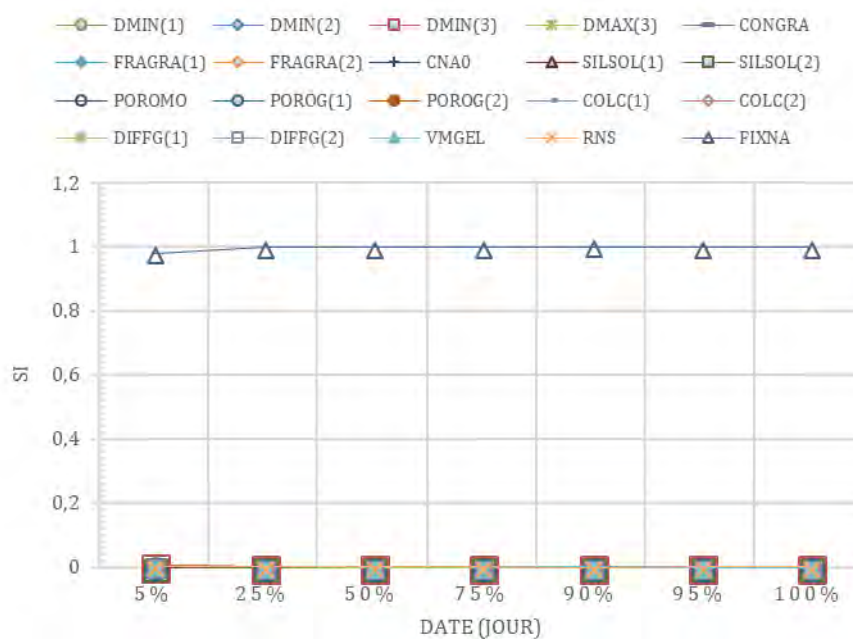


Figure B. 29: Classement des variables en fonctions de leur impact sur le temps pour atteindre divers pourcentages du gonflement Max  $t_{\%VM_{Max}}$  à la température variable de Song Loulou

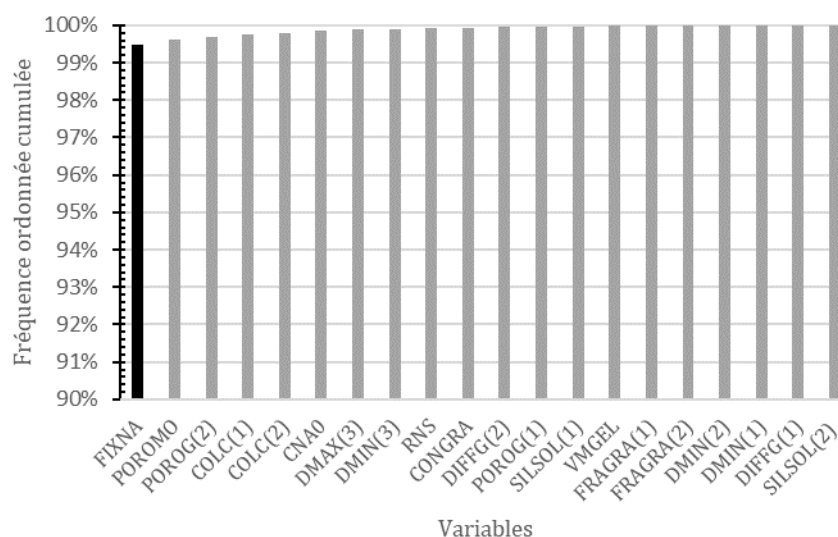


Figure B. 30: Fréquence ordonnée cumulée sur la somme des indices globaux du temps pour atteindre divers pourcentages  $t_{\%VM_{Max}}$  à la température variable de Song Loulou

## Annexe C

### Eléments complémentaires de construction du modèle de substitution de RAG



C. 1.	AJUSTEMENT NON-LINEAIRE DE LEVENBERG-MARQUARDT APPLIQUE AUX SIGMOÏDES.....	214
C. 2.	COEFFICIENTS DU MODELE DE SUBSTITUTION DE CALCUL DE $E_V(T)$ A LA T° DE SONG LOULOU .....	217
C. 3.	COEFFICIENTS DU MODELE DE SUBSTITUTION DE CALCUL DE $E_V(T)$ EN CONDITIONS ACCELEREES....	221

### C.1. Ajustement non-linéaire de Levenberg-Marquardt appliqué aux sigmoïdes

L'expression paramétrique des sigmoïdes dont on souhaite déterminer les paramètres est

la suivante :  $\varepsilon_v(t) = \frac{1-e^{-\frac{t}{\tau_c}}}{1+e^{-\frac{t-\tau_L}{\tau_c}}} \varepsilon_{vMax} = \varepsilon_N(t) \cdot \varepsilon_{vMax}$ , en posant :  $P_1 = \tau_L$  et  $P_2 = \frac{1}{\tau_c}$  on a :  $\varepsilon_N(t) = \frac{1-e^{-P_2 t}}{1+e^{(P_1 P_2 - P_2 t)}}$ . L'implémentation de la méthode d'ajustement non-linéaire de Levenberg-Marquardt [Marquardt 1963, Lourakis 2005] a été effectuée suivant les indications ci-après.

Soit  $P$ , un vecteur qui contient tous les paramètres à ajuster (ici, il s'agit des deux paramètres  $\tau_c$  et  $\tau_L$  de l'expression mathématique donnée précédemment,  $\varepsilon^\infty$  étant la valeur maximale de chaque cinétique déduite directement des données ; pour les deux exemples du chapitre 3, il s'agit de  $b_1$  et  $b_2$ ) . Le  $j^{ième}$  paramètre, après  $k + 1$  itérations est défini par :  $P_j^k = P_j^{k-1} + \Delta P_j^{k-1}$ . Pour ajuster une équation  $f(t, P)$ , de paramètres  $P_j$ , sur des données expérimentales  $(t_i, D_i)$ , les  $t_i$  étant ordonnées et  $i$  étant la  $i^{ième}$  donnée, on peut définir la fonction  $f(t_i, P)$  par une série de Taylor tronquée à la première dérivée :

$$\begin{aligned} f(t_i, P^{k+1}) &= f(t_i, P^k) + \sum_j \frac{\partial f(t_i, P^k)}{\partial P_j} (P_j^{k+1} - P_j^k) \\ &= f(t_i, P^k) + \sum_j J_{ij}^k \Delta P_j^k \end{aligned}$$

Soit  $r^k$  le vecteur contenant les résidus de l'itération  $k$  en cours, et  $R^k$  le vecteur contenant le résidu de la prochaine itération calculé pendant l'itération en cours :

$$\begin{aligned} r_i^k &= D_i - f(t_i, P^k) \\ R_i^k &= D_i - f(t_i, P^{k+1}) \\ &= D_i - f(t_i, P^k) - \sum_j J_{ij}^k \Delta P_j^k \\ &= r_i^k - \sum_j J_{ij}^k \Delta P_j^k \end{aligned}$$

Il est question de minimiser la somme de toutes les « distances » entre les valeurs connues (généralement expérimentale, mais ici obtenues par des simulations de Monte Carlo avec un modèle physico-chimique de RAG) et le modèle de substitution (ici la Sigmoïde), donnée par l'équation ci-après :

$$\sum_i (R_i^k)^2 = \sum_i (r_i^k - \sum_j J_{ij}^k \Delta P_j^k)^2$$

Finalement, la seule variable dans l'équation précédente est le vecteur  $\Delta P^k$ . On la dérive donc par rapport à chaque élément  $\Delta P_j^k$  et on essaye de trouver  $\Delta P_j^k$  qui annule la dérivée. Tout d'abord, on peut noter qu'au premier ordre :

$$\sum_i \sum_j \frac{\partial (R_i^k)^2}{\partial \Delta P_j^k} = \sum_i \sum_j \frac{\partial (r_i^k)^2}{\partial \Delta P_j^k} = 0$$

Ensuite, en notant que  $J$  ne dépend pas explicitement de  $\Delta P_j^k$ , il reste :

$$-2 \sum_i \sum_j \sum_m \frac{\partial J_{ij}^k \Delta P_j^k}{\partial \Delta P_m^k} (r_k^i - \sum_j J_{ij}^k \Delta P_j^k) = 0$$

Si  $i \neq j$ , alors  $\partial \Delta P_j^k / \partial \Delta P_m^k = 0$ . Il reste donc :

$$\sum_i J_{ij}^k (r_k^i - \sum_j J_{ij}^k \Delta P_j^k) = 0$$

Ce qui écrit en termes matriciels donne, avec  $J$  pour le Jacobien :

$$(J^T J) \Delta P^k = J^T r^K \Rightarrow \Delta P^k = (J^T J)^{-1} J^T r^K$$

Donner de bons paramètres initiaux est essentiel pour éviter que l'ajustement ne diverge.

La méthode de Levenberg-Marquardt consiste en l'introduction d'un terme d'amortissement, dans l'équation précédente :

$$((J^T J) - \lambda I) \Delta P^k = J^T r^K \Rightarrow \Delta P^k = ((J^T J) - \lambda I)^{-1} J^T r^K$$

Ce terme permet d'ajuster la fonction en utilisant les caractéristiques de la méthode « steepest-descent », lorsque les valeurs des paramètres initiaux  $\Delta P^k$  sont loin des valeurs finales, avec  $\lambda$  large ; ou les caractéristiques de la méthode de Gauss-Newton, lorsque  $\Delta P^k$  est proche des valeurs finales, avec  $\lambda$  petit. Une valeur typique de  $\lambda$  pour commencer l'ajustement est 0,01. Ensuite, la racine de la somme des carrés des résidus (Root Mean Square Error) doit être calculée plusieurs fois (et donc la fonction elle-même) afin de déterminer la nouvelle valeur de  $\lambda$ . À chaque itération, la RMSE est calculée pour  $\lambda = \lambda_0$  et pour  $\lambda = \frac{\lambda_0}{10}$ . Ensuite, à chaque itération, on a les conditions :

- si  $\Delta P^k$  conduit à une moins bonne RMSE que le  $\Delta P^k$  original, alors  $\lambda_0 = \lambda_0 \times 10$  jusqu'à ce qu'une meilleure RMSE soit calculée et l'ancien  $\Delta P^k$  n'est pas remplacé par le nouveau ;
- si  $\lambda = \frac{\lambda_0}{10}$  donne la meilleure RMSE, alors  $\lambda = \frac{\lambda_0}{10}$ ,  $\Delta P^k$  est remplacé et l'itération continue ;
- si  $\lambda = \lambda_0$  donne la meilleure RMSE, alors on garde  $\lambda_0$ ,  $\Delta P^k$  est remplacé et l'itération continue.

$$\text{Ici, } J^T = \left[ \frac{\partial \varepsilon_N(P_1)}{\partial P_1} = P_2 \frac{(1 - e^{-P_2 t}) e^{(P_1 P_2 - P_2 t)}}{(1 + e^{(P_1 P_2 - P_2 t)})^2} \quad \frac{\partial \varepsilon_N(P_2)}{\partial P_2} = \frac{(P_1 - t - P_1 e^{-P_2 t}) e^{(P_1 P_2 - P_2 t)} - t e^{-P_2 t}}{(1 + e^{(P_1 P_2 - P_2 t)})^2} \right].$$

Bien que cette méthode fasse appel à plus de calculs, elle est stable, en ce sens que les paramètres  $P$ , au pire ne convergeront pas, mais dans ce cas, ils ne divergeront pas, car  $\Delta P^k$  n'est pas recalculé pendant que  $\lambda$  augmente.

La qualité d'un ajustement peut être évaluée à l'aide de deux critères :

- La racine de la somme des carrés des résidus (Root Mean Square Error), minimisée lors du fit  $\varepsilon_{rmse} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (y_i^0 - y_i^c)^2}{N}}$ , où  $N$  est le nombre total de points donnés, o pour observé, c pour calculé.
- L'écart type, différent de la RMSE en ce sens que l'on prend en compte le nombre de variables  $\nu$  pour modeler les données. L'écart type dépend alors du nombre de degrés de liberté  $N - \nu$  :  $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (y_i^0 - y_i^c)^2}{N - \nu}}$ , où  $N$ ,  $y_i^0$  et  $y_i^c$  réfèrent aux mêmes quantités présentées précédemment.

## C.2. Coefficients du modèle de substitution de calcul de $\varepsilon_v(t)$ à la T° de Song Loulou

Tableau C. 1 : Coefficients du modèle de substitution de calcul de  $\varepsilon_v(t)$  à la T° de Song Loulou (1/4)

$i$	$a_i^{\varepsilon_{vMax}}$	$a_i^{\tau_c}$	$a_i^{\tau_L}$	$\Psi_i^{Legendre}$
0	2,8925569841E-03	2,3075417208E+00	2,5505168605E+00	1
1	2,8346685847E-05	4,1233239285E-02	4,9419490822E-02	$\xi_1$
2	-4,5829819257E-04	-4,6548313675E-02	-2,2601248507E-02	$\xi_2$
3	-4,5590360234E-04	-5,6441706774E-02	-2,3601649555E-02	$\xi_3$
4	1,8060412201E-03	-2,7745649431E-03	-4,0646982727E-02	$\xi_4$
5	-8,2144220438E-04	2,5253069474E-01	3,0439453169E-01	$\xi_5$
6	-1,0208507816E-03	3,0936886421E-02	3,9379715464E-02	$\xi_6$
7	9,7989205984E-04	-3,9347288538E-03	-2,6320560878E-02	$\xi_7$
8	-8,7806686560E-04	7,9620317522E-03	2,1607671493E-02	$\xi_8$
9	7,4877256901E-05	5,2073188075E-01	5,0601879039E-01	$\xi_9$
10	-9,3048063285E-06	7,0471868257E-03	6,3245979597E-04	$\xi_1 \times \xi_2$
11	-2,8959884903E-05	-2,4792211302E-02	-1,9936273372E-02	$\xi_1 \times \xi_3$
12	2,9659822208E-05	-9,6328546222E-03	-3,9699826337E-03	$\xi_1 \times \xi_4$
13	-2,1871001947E-05	-6,3339453783E-03	1,4782718260E-03	$\xi_1 \times \xi_5$
14	-7,3531104792E-05	4,3709236594E-03	2,0784184535E-02	$\xi_1 \times \xi_6$
15	1,9215756466E-05	5,6005533208E-04	2,8147808774E-03	$\xi_1 \times \xi_7$
16	-7,5290097392E-06	-1,2179978628E-03	-6,6089550089E-04	$\xi_1 \times \xi_8$
17	-9,4995510129E-06	1,7966941271E-03	-5,4262048319E-03	$\xi_1 \times \xi_9$
18	-6,5451797984E-05	-7,9686490402E-04	3,4863030823E-03	$\xi_2 \times \xi_3$
19	-1,7857761365E-04	9,3899394262E-03	-9,0127500753E-03	$\xi_2 \times \xi_4$
20	-8,7397216026E-05	-1,4160126331E-02	2,1409701603E-04	$\xi_2 \times \xi_5$
21	-1,0291316575E-04	-5,5902283500E-03	-3,0377025690E-02	$\xi_2 \times \xi_6$
22	-8,5320827314E-05	4,1594746602E-03	-1,9772805830E-03	$\xi_2 \times \xi_7$
23	7,4202468114E-05	4,0921955679E-04	5,2271906363E-04	$\xi_2 \times \xi_8$
24	5,4868115127E-05	-5,0702731921E-03	-1,1330015710E-02	$\xi_2 \times \xi_9$
25	-1,2369377470E-04	2,4369747737E-03	-1,0929934263E-03	$\xi_3 \times \xi_4$
26	-1,3480990924E-04	5,8087897959E-04	-4,9645233808E-03	$\xi_3 \times \xi_5$
27	-2,7935513411E-04	-3,1469079047E-03	-2,1230805931E-04	$\xi_3 \times \xi_6$
28	-6,4376666854E-05	2,3033960034E-03	-2,1229743702E-03	$\xi_3 \times \xi_7$
29	5,1177694160E-05	-2,7384286180E-03	-1,0727891131E-03	$\xi_3 \times \xi_8$
30	1,4324575220E-05	2,8773905353E-02	2,4448248320E-02	$\xi_3 \times \xi_9$
31	-2,8116663152E-04	3,2294792864E-02	4,0342586240E-03	$\xi_4 \times \xi_5$
32	-3,4289782506E-04	1,4432824629E-02	4,4313713591E-02	$\xi_4 \times \xi_6$
33	5,3581961269E-04	-7,4485540885E-03	5,1564156997E-03	$\xi_4 \times \xi_7$
34	-4,7032144640E-04	6,7555136485E-03	-1,4193989899E-03	$\xi_4 \times \xi_8$
35	-4,8462475623E-05	-1,5021334003E-03	1,7747088902E-02	$\xi_4 \times \xi_9$
36	-2,3812036677E-04	-2,0311884374E-02	-6,2926791334E-02	$\xi_5 \times \xi_6$
37	-1,3959482997E-04	1,0414120851E-02	3,7821539100E-04	$\xi_5 \times \xi_7$
38	1,2561753837E-04	-1,7212500466E-02	-6,6577461721E-03	$\xi_5 \times \xi_8$
39	9,3256173918E-05	-3,7097559679E-02	-4,9516189778E-02	$\xi_5 \times \xi_9$
40	-1,7105250259E-04	4,2447338900E-03	1,6000251265E-02	$\xi_6 \times \xi_7$
41	1,4162718772E-04	-1,3205694071E-03	-1,9700843492E-02	$\xi_6 \times \xi_8$
42	1,2067176607E-04	-1,8533494612E-02	-4,5704213131E-02	$\xi_6 \times \xi_9$
43	-2,4774966115E-04	4,7823331806E-03	-1,4845481050E-03	$\xi_7 \times \xi_8$
44	-1,5546673410E-05	-2,3366923253E-03	6,4971165259E-03	$\xi_7 \times \xi_9$
45	2,1662978735E-05	-1,0113334792E-03	-5,1338006464E-03	$\xi_8 \times \xi_9$
46	-1,5462113460E-05	-1,1697536944E-02	-1,1381937699E-02	$0.5 \times (3\xi_1^2 - 1)$
47	-2,8610560103E-05	2,6987369600E-03	3,5708892616E-03	$0.5 \times (3\xi_2^2 - 1)$
48	1,6687987961E-05	2,2443983006E-03	1,4944427510E-03	$0.5 \times (3\xi_3^2 - 1)$
49	7,6588598049E-05	-3,3822768804E-03	1,0136523511E-02	$0.5 \times (3\xi_4^2 - 1)$
50	1,1026198702E-04	-7,1957018571E-02	-6,2218556747E-02	$0.5 \times (3\xi_5^2 - 1)$
51	1,9887798026E-04	-1,1341458191E-02	-6,4408272930E-02	$0.5 \times (3\xi_6^2 - 1)$
52	1,8065487664E-05	1,1689450640E-03	2,5921113584E-03	$0.5 \times (3\xi_7^2 - 1)$
53	1,3879824927E-04	-1,5867737941E-03	1,8492880496E-03	$0.5 \times (3\xi_8^2 - 1)$
54	3,7969811328E-05	2,6863706211E-01	2,5430258618E-01	$0.5 \times (3\xi_9^2 - 1)$
55	2,2094811266E-06	1,5998005278E-03	5,2778104298E-03	$\xi_1 \times \xi_2 \times \xi_3$

Tableau C. 2 : Coefficients du modèle de substitution de calcul de  $\varepsilon_V(t)$  à la T° de Song Loulou (2/4)

$i$	$a_i^{\varepsilon_{VMax}}$	$a_i^{Tc}$	$a_i^{Tl}$	$\Psi_i^{Legendre}$
56	6,8176322850E-06	6,8167140669E-04	1,0313743705E-02	$\xi_1 \times \xi_2 \times \xi_4$
57	-9,7199838265E-06	1,5459854087E-03	-2,6888925073E-03	$\xi_1 \times \xi_2 \times \xi_5$
58	-4,0621284907E-05	4,2185817330E-03	-3,5155567969E-03	$\xi_1 \times \xi_2 \times \xi_6$
59	1,1628633517E-05	7,9977423815E-03	9,5850454766E-03	$\xi_1 \times \xi_2 \times \xi_7$
60	-1,9972225861E-06	5,8252386914E-03	-9,5132823374E-03	$\xi_1 \times \xi_2 \times \xi_8$
61	-1,2523641749E-06	-4,0566669020E-03	6,3283599741E-04	$\xi_1 \times \xi_2 \times \xi_9$
62	-1,2000631041E-05	1,1585567499E-02	7,1987689610E-03	$\xi_1 \times \xi_3 \times \xi_4$
63	-3,1830185433E-07	-1,4656203626E-03	-1,9367936482E-04	$\xi_1 \times \xi_3 \times \xi_5$
64	1,8543007206E-05	3,5802647342E-03	3,1729253530E-03	$\xi_1 \times \xi_3 \times \xi_6$
65	4,0461861777E-06	1,8756987680E-03	2,3991219706E-03	$\xi_1 \times \xi_3 \times \xi_7$
66	9,1197791242E-06	8,7948304303E-04	5,3908534425E-04	$\xi_1 \times \xi_3 \times \xi_8$
67	-5,1326534223E-06	-2,4705343185E-03	2,4130797012E-03	$\xi_1 \times \xi_3 \times \xi_9$
68	1,4068753955E-05	-8,1672222590E-03	5,4799890721E-03	$\xi_1 \times \xi_4 \times \xi_5$
69	2,0888129531E-05	-1,4910720413E-02	1,9823772637E-04	$\xi_1 \times \xi_4 \times \xi_6$
70	-9,8727173385E-06	-9,4403202356E-03	-1,1205037080E-02	$\xi_1 \times \xi_4 \times \xi_7$
71	6,2451998224E-06	9,3995201645E-03	9,7216307213E-03	$\xi_1 \times \xi_4 \times \xi_8$
72	1,1722186027E-05	-9,3500647564E-03	3,6438227003E-04	$\xi_1 \times \xi_4 \times \xi_9$
73	-8,0889071497E-05	8,9806493327E-04	-4,3292053438E-03	$\xi_1 \times \xi_5 \times \xi_6$
74	7,3010698166E-06	1,5031795633E-03	4,3338188480E-03	$\xi_1 \times \xi_5 \times \xi_7$
75	-7,1327375016E-06	-1,2093462598E-02	-1,1197426567E-02	$\xi_1 \times \xi_5 \times \xi_8$
76	-7,4548646753E-06	1,4530040503E-02	-1,1428107548E-02	$\xi_1 \times \xi_5 \times \xi_9$
77	2,4870777042E-05	7,6053436040E-03	8,8532821051E-03	$\xi_1 \times \xi_6 \times \xi_7$
78	-1,7937698210E-05	-2,8909398816E-03	-6,1735106831E-03	$\xi_1 \times \xi_6 \times \xi_8$
79	-1,5818120072E-05	-1,8131964256E-03	-5,6398627698E-03	$\xi_1 \times \xi_6 \times \xi_9$
80	3,0972405588E-06	1,7886308024E-03	6,6149068517E-03	$\xi_1 \times \xi_7 \times \xi_8$
81	-1,2736522464E-05	5,5727641194E-03	7,0645753003E-03	$\xi_1 \times \xi_7 \times \xi_9$
82	-9,2342990310E-06	-1,3237984251E-03	-8,5574917256E-03	$\xi_1 \times \xi_8 \times \xi_9$
83	-6,8099260071E-05	-2,2684228823E-03	-5,4331585505E-04	$\xi_2 \times \xi_3 \times \xi_4$
84	3,4218831218E-05	-7,8195709178E-03	-3,1991643984E-03	$\xi_2 \times \xi_3 \times \xi_5$
85	2,7488607634E-05	-1,1787222299E-02	-1,4753486597E-02	$\xi_2 \times \xi_3 \times \xi_6$
86	-2,6743945903E-05	-5,5478791443E-03	2,7129041259E-03	$\xi_2 \times \xi_3 \times \xi_7$
87	2,9668389706E-05	-5,6201895346E-03	-8,7036016095E-03	$\xi_2 \times \xi_3 \times \xi_8$
88	5,4152906441E-06	8,4173410280E-03	5,9232614699E-03	$\xi_2 \times \xi_3 \times \xi_9$
89	-1,4906608962E-04	7,2300958758E-03	-2,3999029749E-02	$\xi_2 \times \xi_4 \times \xi_5$
90	-2,1676722197E-04	2,8323969459E-02	2,7331609763E-03	$\xi_2 \times \xi_4 \times \xi_6$
91	5,0739378749E-06	6,5689917299E-03	1,3682366988E-02	$\xi_2 \times \xi_4 \times \xi_7$
92	-1,1640733087E-05	-1,1203091831E-02	-1,4179533623E-02	$\xi_2 \times \xi_4 \times \xi_8$
93	-9,1924996032E-06	-1,0951693796E-02	-1,3325395760E-02	$\xi_2 \times \xi_4 \times \xi_9$
94	1,9052784662E-04	-2,9197017632E-02	-1,4823437993E-02	$\xi_2 \times \xi_5 \times \xi_6$
95	-7,1658950909E-05	4,8332971180E-05	-1,2320933525E-02	$\xi_2 \times \xi_5 \times \xi_7$
96	7,4919974551E-05	-1,3961146962E-02	4,3050397636E-03	$\xi_2 \times \xi_5 \times \xi_8$
97	4,7122974023E-05	-3,4212646708E-03	4,5821774802E-03	$\xi_2 \times \xi_5 \times \xi_9$
98	-1,0496103753E-04	1,1179796435E-02	1,7306370295E-03	$\xi_2 \times \xi_6 \times \xi_7$
99	1,0088018248E-04	-7,3340883425E-03	-3,1317993885E-03	$\xi_2 \times \xi_6 \times \xi_8$
100	8,4807602254E-05	-9,6864002199E-03	4,4805214289E-03	$\xi_2 \times \xi_6 \times \xi_9$
101	6,1360361293E-06	-6,6455446090E-03	-5,4049513494E-03	$\xi_2 \times \xi_7 \times \xi_8$
102	8,3622574750E-06	-1,2697645722E-02	-2,8318605202E-03	$\xi_2 \times \xi_7 \times \xi_9$
103	6,5400905212E-06	1,8772112865E-03	4,7203329564E-03	$\xi_2 \times \xi_8 \times \xi_9$
104	-1,2356625974E-04	2,4625678782E-02	9,1115745024E-03	$\xi_3 \times \xi_4 \times \xi_5$
105	-1,6203114714E-04	5,2573395741E-03	1,4368000065E-02	$\xi_3 \times \xi_4 \times \xi_6$
106	1,6247573825E-05	-2,0177779454E-03	7,5323897927E-04	$\xi_3 \times \xi_4 \times \xi_7$
107	-8,7275072884E-06	1,3339650696E-03	-3,6523100649E-03	$\xi_3 \times \xi_4 \times \xi_8$
108	3,5170608949E-06	-1,3500316042E-02	6,0057324616E-04	$\xi_3 \times \xi_4 \times \xi_9$
109	2,8511023453E-05	-8,7882267059E-03	-2,7407453688E-02	$\xi_3 \times \xi_5 \times \xi_6$
110	-6,5916022099E-05	2,0347123979E-03	-7,9758019931E-04	$\xi_3 \times \xi_5 \times \xi_7$



Tableau C. 3 : Coefficients du modèle de substitution de calcul de  $\varepsilon_v(t)$  à la T° de Song Loulou (3/4)

$i$	$a_i^{\varepsilon_{vMax}}$	$a_i^{rc}$	$a_i^{rL}$	$\Psi_i^{Legendre}$
111	5,7270795443E-05	-2,3168945281E-03	-3,4612947984E-03	$\xi_3 \times \xi_5 \times \xi_8$
112	5,7090691478E-06	-1,1108704271E-02	-3,5786515006E-03	$\xi_3 \times \xi_5 \times \xi_9$
113	-8,2991536656E-05	1,1202257203E-03	2,9883453153E-03	$\xi_3 \times \xi_6 \times \xi_7$
114	7,9671171505E-05	-2,6104317963E-03	-9,2553583072E-03	$\xi_3 \times \xi_6 \times \xi_8$
115	2,9529965639E-05	-1,3093201315E-02	-7,7592094011E-03	$\xi_3 \times \xi_6 \times \xi_9$
116	-3,0964759960E-06	9,7894230104E-03	1,5245919179E-03	$\xi_3 \times \xi_7 \times \xi_8$
117	-7,8268978001E-07	-7,0704410018E-03	-4,8172553165E-03	$\xi_3 \times \xi_7 \times \xi_9$
118	-3,9300931328E-06	4,4870718890E-03	5,8922839993E-03	$\xi_3 \times \xi_8 \times \xi_9$
119	-3,8935617721E-04	4,7865305227E-02	1,5058986731E-02	$\xi_4 \times \xi_5 \times \xi_6$
120	2,8208205194E-05	3,4392810428E-03	2,4986577273E-02	$\xi_4 \times \xi_5 \times \xi_7$
121	-2,2727383149E-05	2,8050001202E-03	-7,6344599501E-03	$\xi_4 \times \xi_5 \times \xi_8$
122	-1,9314125748E-05	-2,5637072603E-02	-7,7940495817E-03	$\xi_4 \times \xi_5 \times \xi_9$
123	6,5623336586E-05	-1,2776899601E-02	1,1592343796E-03	$\xi_4 \times \xi_6 \times \xi_7$
124	-7,5461498840E-05	1,0278047368E-02	-7,0438977526E-03	$\xi_4 \times \xi_6 \times \xi_8$
125	-5,0191025404E-05	2,9825446652E-03	-1,1365972021E-03	$\xi_4 \times \xi_6 \times \xi_9$
126	-1,0183938402E-04	1,7381218073E-03	6,2118184000E-03	$\xi_4 \times \xi_7 \times \xi_8$
127	-3,5044153221E-06	-9,8416713918E-04	-2,0121573819E-04	$\xi_4 \times \xi_7 \times \xi_9$
128	8,5681856461E-06	4,6561590666E-03	5,9688190545E-03	$\xi_4 \times \xi_8 \times \xi_9$
129	-1,9745765456E-04	1,5490553293E-02	4,9252024582E-03	$\xi_5 \times \xi_6 \times \xi_7$
130	1,8621270056E-04	-2,3353070053E-02	-1,4988737773E-02	$\xi_5 \times \xi_6 \times \xi_8$
131	1,3167529527E-04	-1,9465481288E-03	-5,7837637779E-03	$\xi_5 \times \xi_6 \times \xi_9$
132	-9,2184441291E-06	-1,1849609661E-03	-9,7525333830E-03	$\xi_5 \times \xi_7 \times \xi_8$
133	5,3744955349E-07	-8,5023279014E-03	-8,7122157307E-04	$\xi_5 \times \xi_7 \times \xi_9$
134	-7,2809531296E-07	1,9989512189E-03	-7,4939320633E-04	$\xi_5 \times \xi_8 \times \xi_9$
135	-4,2977681902E-05	7,3643162625E-03	-1,9415701740E-04	$\xi_6 \times \xi_7 \times \xi_8$
136	-8,7186890266E-06	1,2760903087E-03	-5,1571631896E-03	$\xi_6 \times \xi_7 \times \xi_9$
137	2,4431648853E-05	-8,9285714260E-03	3,6246348079E-04	$\xi_6 \times \xi_8 \times \xi_9$
138	1,6391801002E-06	-1,4166835994E-02	-1,4012363143E-02	$\xi_7 \times \xi_8 \times \xi_9$
139	-1,7768679324E-06	6,1101938525E-03	2,5578417205E-04	$0.5 \times (3\xi_1^2 - 1) \times \xi_2$
140	8,3944137565E-06	1,1692746868E-02	4,3290105235E-03	$0.5 \times (3\xi_1^2 - 1) \times \xi_3$
141	-1,2201815105E-05	3,5199494586E-03	6,8878725252E-05	$0.5 \times (3\xi_1^2 - 1) \times \xi_4$
142	6,0834629425E-07	-4,8592656357E-03	-5,3865287022E-03	$0.5 \times (3\xi_1^2 - 1) \times \xi_5$
143	1,0382396338E-05	-5,2931359243E-03	-9,5431613774E-03	$0.5 \times (3\xi_1^2 - 1) \times \xi_6$
144	-1,9574787071E-06	3,0766789943E-03	1,9153075988E-03	$0.5 \times (3\xi_1^2 - 1) \times \xi_7$
145	9,3023710881E-06	-4,0703564331E-03	-2,3453824094E-03	$0.5 \times (3\xi_1^2 - 1) \times \xi_8$
146	-1,7539102254E-06	2,2662340061E-03	4,0788173780E-03	$0.5 \times (3\xi_1^2 - 1) \times \xi_9$
147	3,0290836996E-06	4,3214882514E-03	1,8006766747E-03	$0.5 \times (3\xi_2^2 - 1) \times \xi_1$
148	1,6900527793E-06	-3,7437393587E-04	-1,9357029287E-03	$0.5 \times (3\xi_2^2 - 1) \times \xi_3$
149	-2,0142329570E-05	-3,9363278551E-03	-2,6743762800E-03	$0.5 \times (3\xi_2^2 - 1) \times \xi_4$
150	1,4767879185E-05	-5,9990071863E-03	5,4654773500E-03	$0.5 \times (3\xi_2^2 - 1) \times \xi_5$
151	3,1538190310E-05	-5,0237064000E-03	-3,1083528784E-03	$0.5 \times (3\xi_2^2 - 1) \times \xi_6$
152	-2,3317407955E-05	4,1096469731E-03	-4,1634835297E-03	$0.5 \times (3\xi_2^2 - 1) \times \xi_7$
153	1,4686968910E-05	6,6045030358E-03	5,6374388075E-05	$0.5 \times (3\xi_2^2 - 1) \times \xi_8$
154	8,1852957166E-06	1,3106917947E-03	3,3718630996E-03	$0.5 \times (3\xi_2^2 - 1) \times \xi_9$
155	8,9693754277E-06	-1,7580542376E-03	-2,3467040937E-04	$0.5 \times (3\xi_3^2 - 1) \times \xi_1$
156	1,4717176228E-05	2,6434825663E-03	2,0131147369E-03	$0.5 \times (3\xi_3^2 - 1) \times \xi_2$
157	6,2095139874E-06	9,5902373694E-04	-8,1815947408E-04	$0.5 \times (3\xi_3^2 - 1) \times \xi_4$
158	2,1366806940E-05	-2,7337020478E-03	-1,8009857684E-04	$0.5 \times (3\xi_3^2 - 1) \times \xi_5$
159	2,4719228643E-05	2,3813758615E-03	2,1546302371E-03	$0.5 \times (3\xi_3^2 - 1) \times \xi_6$
160	7,8189803816E-06	1,7378375964E-03	1,2037376380E-03	$0.5 \times (3\xi_3^2 - 1) \times \xi_7$
161	4,8701697598E-06	-1,3508100811E-03	-1,1840854706E-03	$0.5 \times (3\xi_3^2 - 1) \times \xi_8$
162	-2,3455021923E-06	-1,0931019220E-02	-3,3241983984E-03	$0.5 \times (3\xi_3^2 - 1) \times \xi_9$
163	5,1652648785E-06	2,4870453860E-03	1,7454024647E-04	$0.5 \times (3\xi_4^2 - 1) \times \xi_1$
164	2,2482395521E-05	6,4132505743E-03	8,7707190231E-03	$0.5 \times (3\xi_4^2 - 1) \times \xi_2$
165	2,8252896723E-05	4,6669145941E-03	2,6834708459E-03	$0.5 \times (3\xi_4^2 - 1) \times \xi_3$

Tableau C. 4 : Coefficients du modèle de substitution de calcul de  $\varepsilon_V(t)$  à la T° de Song Loulou (4/4)

$i$	$a_i^{\varepsilon_{VMax}}$	$a_i^{\tau_c}$	$a_i^{\tau_L}$	$\Psi_i^{Legendre}$
166	5,9563217562E-05	-6,5017222798E-03	9,9245366070E-03	$0.5 \times (3\xi_4^2 - 1) \times \xi_5$
167	9,9502190373E-05	-1,0677991320E-02	-7,8488297738E-03	$0.5 \times (3\xi_4^2 - 1) \times \xi_6$
168	1,0594858364E-05	-6,8254883731E-03	-4,1119023347E-03	$0.5 \times (3\xi_4^2 - 1) \times \xi_7$
169	7,6132098936E-06	-7,5964442825E-04	5,4572502031E-03	$0.5 \times (3\xi_4^2 - 1) \times \xi_8$
170	1,8931216500E-06	3,6097958659E-03	2,8055833939E-03	$0.5 \times (3\xi_4^2 - 1) \times \xi_9$
171	-6,1232565717E-06	1,3212356001E-03	-5,2587827527E-03	$0.5 \times (3\xi_5^2 - 1) \times \xi_1$
172	7,0339310866E-05	3,1103338396E-04	1,1806448844E-02	$0.5 \times (3\xi_5^2 - 1) \times \xi_2$
173	5,1186467656E-05	1,1420716703E-02	3,4054256402E-03	$0.5 \times (3\xi_5^2 - 1) \times \xi_3$
174	-2,9614543493E-05	-6,4518621718E-03	-1,7468181892E-02	$0.5 \times (3\xi_5^2 - 1) \times \xi_4$
175	1,5469321230E-04	-1,1116790271E-02	1,2628550136E-03	$0.5 \times (3\xi_5^2 - 1) \times \xi_6$
176	-2,3293287549E-05	4,5710328203E-03	-8,2008830093E-03	$0.5 \times (3\xi_5^2 - 1) \times \xi_7$
177	3,0282762529E-05	-6,5362409367E-03	1,7389286463E-03	$0.5 \times (3\xi_5^2 - 1) \times \xi_8$
178	1,2223158285E-05	4,3701234441E-02	8,5750594557E-03	$0.5 \times (3\xi_5^2 - 1) \times \xi_9$
179	-1,7851943625E-05	7,1656140275E-03	-3,6801638454E-04	$0.5 \times (3\xi_6^2 - 1) \times \xi_1$
180	1,5479592621E-04	-1,6054585139E-02	-8,2305672993E-03	$0.5 \times (3\xi_6^2 - 1) \times \xi_2$
181	1,1351909955E-04	-1,1685069035E-02	-2,6658449005E-02	$0.5 \times (3\xi_6^2 - 1) \times \xi_3$
182	-1,1208716831E-04	1,9955175652E-02	1,3978513751E-02	$0.5 \times (3\xi_6^2 - 1) \times \xi_4$
183	2,4701138931E-04	-2,5185156205E-02	-2,9717165161E-02	$0.5 \times (3\xi_6^2 - 1) \times \xi_5$
184	-6,0536266453E-05	1,3004794508E-02	7,5565444724E-03	$0.5 \times (3\xi_6^2 - 1) \times \xi_7$
185	5,1859958547E-05	-7,9288320776E-03	-6,1000773398E-03	$0.5 \times (3\xi_6^2 - 1) \times \xi_8$
186	3,7686744466E-05	-2,3593390828E-02	1,2684077983E-02	$0.5 \times (3\xi_6^2 - 1) \times \xi_9$
187	4,4881210643E-06	1,0935066717E-03	-1,8816189531E-03	$0.5 \times (3\xi_7^2 - 1) \times \xi_1$
188	1,4118625148E-05	-3,2917919245E-03	1,6539717621E-03	$0.5 \times (3\xi_7^2 - 1) \times \xi_2$
189	5,9788565487E-06	-1,2529068340E-03	-2,9276140549E-03	$0.5 \times (3\xi_7^2 - 1) \times \xi_3$
190	6,3102979886E-06	-1,9271504618E-03	-7,4862168607E-04	$0.5 \times (3\xi_7^2 - 1) \times \xi_4$
191	1,8812958975E-05	-6,9952441614E-04	3,5943896765E-03	$0.5 \times (3\xi_7^2 - 1) \times \xi_5$
192	2,4640329272E-05	1,7791907852E-03	-1,4349867377E-03	$0.5 \times (3\xi_7^2 - 1) \times \xi_6$
193	1,7704230904E-06	3,8499953016E-03	6,5224172817E-03	$0.5 \times (3\xi_7^2 - 1) \times \xi_8$
194	-2,8210471788E-06	6,4078395544E-03	7,4991906629E-03	$0.5 \times (3\xi_7^2 - 1) \times \xi_9$
195	-3,7568769973E-06	5,5590834652E-03	5,1512317282E-04	$0.5 \times (3\xi_8^2 - 1) \times \xi_1$
196	-5,1208390475E-06	1,6119455400E-03	-1,0271540674E-03	$0.5 \times (3\xi_8^2 - 1) \times \xi_2$
197	2,3907890277E-06	-4,7569213780E-03	4,8706655849E-03	$0.5 \times (3\xi_8^2 - 1) \times \xi_3$
198	5,7656080036E-05	2,9718621884E-04	1,7282099744E-03	$0.5 \times (3\xi_8^2 - 1) \times \xi_4$
199	2,3835342790E-06	-2,2588207263E-03	3,1263579628E-03	$0.5 \times (3\xi_8^2 - 1) \times \xi_5$
200	1,1166665511E-05	-1,0631110614E-04	2,2380003895E-03	$0.5 \times (3\xi_8^2 - 1) \times \xi_6$
201	2,6189181320E-05	2,5103023484E-03	-5,0494606042E-03	$0.5 \times (3\xi_8^2 - 1) \times \xi_7$
202	2,9432541818E-06	4,3112488871E-03	2,7542571491E-03	$0.5 \times (3\xi_8^2 - 1) \times \xi_9$
203	1,4016633938E-06	-1,1511602442E-02	-1,6161387299E-02	$0.5 \times (3\xi_9^2 - 1) \times \xi_1$
204	2,8622095596E-05	-4,7900727069E-03	-5,8556159030E-03	$0.5 \times (3\xi_9^2 - 1) \times \xi_2$
205	9,8989873278E-06	8,5631480322E-03	1,0127118232E-02	$0.5 \times (3\xi_9^2 - 1) \times \xi_3$
206	-2,1504304955E-05	2,7795542911E-03	3,8140668394E-03	$0.5 \times (3\xi_9^2 - 1) \times \xi_4$
207	4,6427649516E-05	2,7425877912E-02	-1,3090401669E-02	$0.5 \times (3\xi_9^2 - 1) \times \xi_5$
208	6,5498266649E-05	-1,3955610063E-03	-1,5853169948E-02	$0.5 \times (3\xi_9^2 - 1) \times \xi_6$
209	-1,0951234323E-05	-5,2039324817E-03	-5,8628665693E-03	$0.5 \times (3\xi_9^2 - 1) \times \xi_7$
210	4,7881225692E-06	5,4505848896E-03	4,9952888079E-03	$0.5 \times (3\xi_9^2 - 1) \times \xi_8$
211	1,3089465065E-07	6,2515127900E-03	3,8904561655E-03	$0.5 \times (5\xi_1^3 - 3\xi_1)$
212	-7,0264702315E-06	5,3021164391E-03	1,6096017680E-03	$0.5 \times (5\xi_2^3 - 3\xi_2)$
213	-2,2069924471E-06	-2,9621515012E-03	-2,3094915313E-04	$0.5 \times (5\xi_3^3 - 3\xi_3)$
214	-1,0300449592E-05	-3,7490216944E-03	-2,8158758653E-03	$0.5 \times (5\xi_4^3 - 3\xi_4)$
215	-1,4178625124E-06	1,2005829970E-02	1,2778130905E-02	$0.5 \times (5\xi_5^3 - 3\xi_5)$
216	1,5205694828E-05	-1,4552247757E-02	1,2268540169E-02	$0.5 \times (5\xi_6^3 - 3\xi_6)$
217	-2,5583485675E-06	-4,8944262918E-03	-3,7519092902E-04	$0.5 \times (5\xi_7^3 - 3\xi_7)$
218	-1,7918206550E-05	-1,6599835318E-03	-1,4995048516E-04	$0.5 \times (5\xi_8^3 - 3\xi_8)$
219	2,2615800664E-05	1,6957418507E-01	1,6323419890E-01	$0.5 \times (5\xi_9^3 - 3\xi_9)$

### C.3. Coefficients du modèle de substitution de calcul de $\varepsilon_V(t)$ en conditions accélérées

Tableau C. 5 : Coefficients du modèle de substitution de calcul de  $\varepsilon_V(t)$  en conditions accélérées (1/4)

$i$	$a_i^{\varepsilon_{VMax}}$	$a_i^{\tau_c}$	$a_i^{\tau_L}$	$\Psi_i^{Legendre}$
0	2,8961199493E-03	1,8202921737E+00	2,0773239978E+00	1
1	2,7388708279E-05	4,5137307957E-02	4,7947599749E-02	$\xi_1$
2	-4,5484867636E-04	-4,7095425111E-02	-2,1202702687E-02	$\xi_2$
3	-4,5582650079E-04	-5,5126787905E-02	-1,9756167464E-02	$\xi_3$
4	1,8056565620E-03	-3,3051422658E-03	-3,8465069169E-02	$\xi_4$
5	-8,1719654748E-04	2,5096053332E-01	2,8596242076E-01	$\xi_5$
6	-1,0169793045E-03	2,8912932799E-02	3,3881511393E-02	$\xi_6$
7	9,8030072224E-04	-6,5339675259E-03	-2,5346299067E-02	$\xi_7$
8	-8,7769577677E-04	5,5569809289E-03	1,9425575941E-02	$\xi_8$
9	7,6413307634E-05	5,2598931198E-01	4,9134191843E-01	$\xi_9$
10	-1,0893259003E-05	2,9052155470E-03	-1,6842357396E-03	$\xi_1 \times \xi_2$
11	-2,7181783620E-05	-2,5428048985E-02	-1,9671072780E-02	$\xi_1 \times \xi_3$
12	3,0465950843E-05	-1,0729435470E-02	-3,7527322568E-03	$\xi_1 \times \xi_4$
13	-2,3278207209E-05	3,8707374460E-03	2,0576685199E-03	$\xi_1 \times \xi_5$
14	-7,5796747386E-05	8,6104659925E-03	1,9214329444E-02	$\xi_1 \times \xi_6$
15	2,0763637368E-05	2,7968355915E-03	1,6919315454E-03	$\xi_1 \times \xi_7$
16	-8,3272773137E-06	1,4194478081E-03	3,5726798343E-04	$\xi_1 \times \xi_8$
17	-7,9204475616E-06	-1,0171834061E-03	-4,4762068211E-03	$\xi_1 \times \xi_9$
18	-6,5893526771E-05	2,4409076501E-03	5,5846932403E-03	$\xi_2 \times \xi_3$
19	-1,7402779921E-04	8,2646904611E-03	-9,8990682841E-03	$\xi_2 \times \xi_4$
20	-8,6814848465E-05	-1,3878941431E-02	1,8491506092E-03	$\xi_2 \times \xi_5$
21	-1,0116834414E-04	-9,3941452206E-03	-2,9742099628E-02	$\xi_2 \times \xi_6$
22	-8,3631306800E-05	6,9781016905E-03	-3,2636716230E-03	$\xi_2 \times \xi_7$
23	7,2121667443E-05	6,8331543434E-04	-1,6314449575E-03	$\xi_2 \times \xi_8$
24	5,6578822268E-05	-4,2143985432E-03	-1,1146831487E-02	$\xi_2 \times \xi_9$
25	-1,2012049225E-04	1,2463830826E-03	-2,3205542984E-03	$\xi_3 \times \xi_4$
26	-1,3698189193E-04	-9,0618822853E-03	-6,3191680208E-03	$\xi_3 \times \xi_5$
27	-2,7965384912E-04	-3,0876115446E-03	1,2938823322E-03	$\xi_3 \times \xi_6$
28	-6,1530972899E-05	-3,4155839574E-03	-4,3755032211E-03	$\xi_3 \times \xi_7$
29	4,7843772125E-05	-3,1123197143E-03	-1,4455281993E-03	$\xi_3 \times \xi_8$
30	1,4015486050E-05	2,5193665360E-02	2,1252695779E-02	$\xi_3 \times \xi_9$
31	-2,7678975362E-04	2,1053699020E-02	-7,4318901084E-04	$\xi_4 \times \xi_5$
32	-3,4032115188E-04	1,4964795739E-02	4,1774960742E-02	$\xi_4 \times \xi_6$
33	5,3613098813E-04	-1,7165709518E-03	6,8867889822E-03	$\xi_4 \times \xi_7$
34	-4,7004445557E-04	4,9009323201E-03	-1,1007977328E-03	$\xi_4 \times \xi_8$
35	-4,8178562677E-05	1,6880907739E-03	1,6725616398E-02	$\xi_4 \times \xi_9$
36	-2,3868928963E-04	-9,6597497542E-03	-6,0673343573E-02	$\xi_5 \times \xi_6$
37	-1,3609261112E-04	8,5031572567E-03	-9,5170348866E-05	$\xi_5 \times \xi_7$
38	1,2716386297E-04	-1,4387931920E-02	-3,7835686328E-03	$\xi_5 \times \xi_8$
39	9,6111942796E-05	-1,1943339461E-02	-2,7203117927E-02	$\xi_5 \times \xi_9$
40	-1,7140940219E-04	1,5566418962E-03	1,4349712647E-02	$\xi_6 \times \xi_7$
41	1,4306622152E-04	-2,0325242447E-03	-1,8283887821E-02	$\xi_6 \times \xi_8$
42	1,2080873393E-04	-1,5222335118E-02	-4,2203607676E-02	$\xi_6 \times \xi_9$
43	-2,5084670888E-04	3,3365823840E-03	-3,3667143091E-03	$\xi_7 \times \xi_8$
44	-1,7700450378E-05	-3,0902648240E-03	5,0863197055E-03	$\xi_7 \times \xi_9$
45	1,9623266669E-05	2,7089139730E-04	-4,7138803733E-03	$\xi_8 \times \xi_9$
46	-1,2571296359E-05	-9,1496779902E-03	-8,8677999660E-03	$0.5 \times (3\xi_1^2 - 1)$
47	-2,7759991503E-05	2,0768369673E-03	4,1250438674E-03	$0.5 \times (3\xi_2^2 - 1)$
48	1,6359881830E-05	3,0995885838E-03	7,5377143427E-04	$0.5 \times (3\xi_3^2 - 1)$
49	7,4621713058E-05	-4,9416436926E-03	9,0736556368E-03	$0.5 \times (3\xi_4^2 - 1)$
50	1,0828848500E-04	-5,4346155811E-02	-5,4889301054E-02	$0.5 \times (3\xi_5^2 - 1)$
51	1,9708366212E-04	-1,4091232405E-02	-6,1519913778E-02	$0.5 \times (3\xi_6^2 - 1)$
52	1,5423169150E-05	2,2861219826E-03	2,4313711823E-03	$0.5 \times (3\xi_7^2 - 1)$
53	1,4050023201E-04	-1,0327120945E-03	2,6258925311E-03	$0.5 \times (3\xi_8^2 - 1)$
54	4,1889681577E-05	2,7085294936E-01	2,5673498413E-01	$0.5 \times (3\xi_9^2 - 1)$
55	6,1616711283E-06	1,8627111827E-03	7,0875130209E-03	$\xi_1 \times \xi_2 \times \xi_3$

Tableau C. 6 : Coefficients du modèle de substitution de calcul de  $\varepsilon V(t)$  en conditions accélérées (2/4)

$i$	$a_i^{\varepsilon_{vMax}}$	$a_i^{\tau_c}$	$a_i^{\tau_L}$	$\Psi_i^{Legendre}$
56	3,1029525639E-06	8,7983958143E-03	1,1167675527E-02	$\xi_1 \times \xi_2 \times \xi_4$
57	-1,1302863026E-05	2,2022871797E-03	-4,4466836564E-03	$\xi_1 \times \xi_2 \times \xi_5$
58	-3,8450855201E-05	4,0721038117E-03	-4,7937725238E-03	$\xi_1 \times \xi_2 \times \xi_6$
59	1,4314797405E-05	1,0093533347E-02	1,0111537895E-02	$\xi_1 \times \xi_2 \times \xi_7$
60	-7,1087951996E-06	3,8552207612E-03	-1,1552937391E-02	$\xi_1 \times \xi_2 \times \xi_8$
61	3,9004892901E-06	-6,8642294748E-03	-1,8989778891E-03	$\xi_1 \times \xi_2 \times \xi_9$
62	-8,0005380771E-06	7,0929408595E-03	4,3901316881E-03	$\xi_1 \times \xi_3 \times \xi_4$
63	-3,4896711420E-06	-3,1988110261E-03	-1,6534085208E-03	$\xi_1 \times \xi_3 \times \xi_5$
64	1,6191950871E-05	-2,3486657856E-03	1,2483691832E-03	$\xi_1 \times \xi_3 \times \xi_6$
65	6,2646375265E-06	1,7605538172E-03	2,4923250904E-03	$\xi_1 \times \xi_3 \times \xi_7$
66	2,5472087024E-06	7,9045195459E-03	-5,0393920541E-04	$\xi_1 \times \xi_3 \times \xi_8$
67	-2,1044800985E-06	1,6753836711E-03	9,9268929630E-04	$\xi_1 \times \xi_3 \times \xi_9$
68	6,2055556315E-06	-3,7872142072E-03	7,5188503155E-03	$\xi_1 \times \xi_4 \times \xi_5$
69	1,5997821448E-05	-1,0654803167E-02	3,5664809208E-04	$\xi_1 \times \xi_4 \times \xi_6$
70	-8,5846251190E-07	-6,9399556018E-03	-7,8021603172E-03	$\xi_1 \times \xi_4 \times \xi_7$
71	-5,8183919500E-06	1,1584341190E-02	1,0641244416E-02	$\xi_1 \times \xi_4 \times \xi_8$
72	2,4857448718E-06	-9,5038370463E-03	-1,2736359062E-03	$\xi_1 \times \xi_4 \times \xi_9$
73	-7,6637101366E-05	5,0853594310E-03	-6,7798588739E-03	$\xi_1 \times \xi_5 \times \xi_6$
74	3,0087668230E-06	8,4457117939E-03	7,2123426844E-03	$\xi_1 \times \xi_5 \times \xi_7$
75	-7,1056425291E-06	-8,9364267339E-03	-1,2112922318E-02	$\xi_1 \times \xi_5 \times \xi_8$
76	-1,7237716832E-06	-3,6048737637E-03	-1,2058489885E-02	$\xi_1 \times \xi_5 \times \xi_9$
77	2,1889887889E-05	4,3164444139E-03	8,7006446327E-03	$\xi_1 \times \xi_6 \times \xi_7$
78	-8,2288786634E-06	-4,9726779360E-03	-6,7852761983E-03	$\xi_1 \times \xi_6 \times \xi_8$
79	-7,7481715156E-06	-5,4321223685E-03	-7,8195464083E-03	$\xi_1 \times \xi_6 \times \xi_9$
80	-1,6205024522E-06	7,0596242074E-03	9,9995471314E-03	$\xi_1 \times \xi_7 \times \xi_8$
81	-1,3786997890E-05	3,8005803059E-03	6,0869450830E-03	$\xi_1 \times \xi_7 \times \xi_9$
82	-2,7840147339E-06	-9,0068099518E-05	-6,1330569895E-03	$\xi_1 \times \xi_8 \times \xi_9$
83	-5,9379748672E-05	-5,3888498921E-03	-2,1823614404E-03	$\xi_2 \times \xi_3 \times \xi_4$
84	3,1652027976E-05	-7,3654149403E-03	-5,9533850508E-04	$\xi_2 \times \xi_3 \times \xi_5$
85	2,1255336324E-05	-7,4118115600E-03	-1,3191812733E-02	$\xi_2 \times \xi_3 \times \xi_6$
86	-2,2473904854E-05	-4,3697743256E-03	2,8224791053E-03	$\xi_2 \times \xi_3 \times \xi_7$
87	2,5712879970E-05	-4,1422052635E-03	-5,6456745986E-03	$\xi_2 \times \xi_3 \times \xi_8$
88	6,3673165350E-06	1,0200553464E-02	6,2692295386E-03	$\xi_2 \times \xi_3 \times \xi_9$
89	-1,3881345142E-04	2,4894812551E-03	-2,6895585617E-02	$\xi_2 \times \xi_4 \times \xi_5$
90	-2,0661187026E-04	1,8729395452E-02	-1,6476125170E-04	$\xi_2 \times \xi_4 \times \xi_6$
91	2,6411114799E-06	4,3853340797E-03	1,0269206627E-02	$\xi_2 \times \xi_4 \times \xi_7$
92	-9,7889210898E-06	-4,3003299992E-03	-1,0342744799E-02	$\xi_2 \times \xi_4 \times \xi_8$
93	-1,4328924003E-05	-7,3907856092E-03	-8,2643385516E-03	$\xi_2 \times \xi_4 \times \xi_9$
94	1,9382358003E-04	-3,5015767647E-02	-1,2691070798E-02	$\xi_2 \times \xi_5 \times \xi_6$
95	-6,6727757753E-05	1,2593316147E-03	-1,2082630826E-02	$\xi_2 \times \xi_5 \times \xi_7$
96	7,5449438189E-05	-5,2476414497E-03	7,2249119057E-03	$\xi_2 \times \xi_5 \times \xi_8$
97	5,1740967540E-05	4,1333623932E-03	5,5704355115E-03	$\xi_2 \times \xi_5 \times \xi_9$
98	-1,0226219162E-04	5,3161355472E-03	-2,6881473272E-03	$\xi_2 \times \xi_6 \times \xi_7$
99	9,5090775009E-05	-6,1140909359E-03	-2,5996603353E-03	$\xi_2 \times \xi_6 \times \xi_8$
100	8,5221998576E-05	-1,0591360894E-02	4,8568765615E-04	$\xi_2 \times \xi_6 \times \xi_9$
101	6,7737451933E-06	-5,8299205769E-03	-5,4426376684E-03	$\xi_2 \times \xi_7 \times \xi_8$
102	3,0604783545E-06	-4,2452962134E-03	-1,4467424732E-03	$\xi_2 \times \xi_7 \times \xi_9$
103	4,7864645113E-06	-1,2125910518E-03	1,0936206447E-03	$\xi_2 \times \xi_8 \times \xi_9$
104	-1,1827388544E-04	1,3545069365E-02	6,0738137228E-03	$\xi_3 \times \xi_4 \times \xi_5$
105	-1,6215666554E-04	4,1284184692E-03	1,1241684275E-02	$\xi_3 \times \xi_4 \times \xi_6$
106	1,6904367936E-05	-1,5171299577E-03	2,0665052491E-03	$\xi_3 \times \xi_4 \times \xi_7$
107	-9,3970788808E-06	-6,2661528030E-03	-4,8029098239E-03	$\xi_3 \times \xi_4 \times \xi_8$
108	8,2324209470E-06	-1,4835881859E-02	4,1516803437E-04	$\xi_3 \times \xi_4 \times \xi_9$
109	2,3620879993E-05	-9,1037965867E-03	-2,6415315136E-02	$\xi_3 \times \xi_5 \times \xi_6$
110	-6,4507875676E-05	1,8691041581E-03	-4,6036348531E-04	$\xi_3 \times \xi_5 \times \xi_7$



Tableau C. 7 : Coefficients du modèle de substitution de calcul de  $\varepsilon V(t)$  en conditions accélérées (3/4)

$i$	$a_i^{\varepsilon_{vMax}}$	$a_i^{T_c}$	$a_i^{T_L}$	$\Psi_i^{Legendre}$
111	5,5626650137E-05	-6,0871216454E-03	-3,0465006307E-03	$\xi_3 \times \xi_5 \times \xi_8$
112	8,0843059099E-06	-2,0735175252E-04	-6,2787700871E-03	$\xi_3 \times \xi_5 \times \xi_9$
113	-8,0943946828E-05	-5,4168018650E-03	8,5902122043E-04	$\xi_3 \times \xi_6 \times \xi_7$
114	7,6159697258E-05	-5,6616181623E-03	-7,8454010107E-03	$\xi_3 \times \xi_6 \times \xi_8$
115	2,8376541169E-05	-4,2236832944E-03	-5,4067571837E-03	$\xi_3 \times \xi_6 \times \xi_9$
116	-8,0809010703E-06	3,1287787136E-04	-2,6443456003E-03	$\xi_3 \times \xi_7 \times \xi_8$
117	1,0494293628E-06	-7,0451657691E-03	-4,9733911582E-03	$\xi_3 \times \xi_7 \times \xi_9$
118	-1,6770840100E-06	5,3171493117E-03	3,5102176190E-03	$\xi_3 \times \xi_8 \times \xi_9$
119	-3,7571394831E-04	4,8014849288E-02	1,2132880028E-02	$\xi_4 \times \xi_5 \times \xi_6$
120	2,8790533315E-05	6,1105351992E-03	2,8014846675E-02	$\xi_4 \times \xi_5 \times \xi_7$
121	-2,5059197462E-05	5,5432084962E-04	-1,1823548785E-02	$\xi_4 \times \xi_5 \times \xi_8$
122	-2,0603624901E-05	-8,6694686233E-03	-9,4364455141E-03	$\xi_4 \times \xi_5 \times \xi_9$
123	5,9647697356E-05	-1,0149676644E-02	1,1285712178E-03	$\xi_4 \times \xi_6 \times \xi_7$
124	-6,7017538592E-05	7,2570030951E-03	-6,8747001315E-03	$\xi_4 \times \xi_6 \times \xi_8$
125	-4,9241146882E-05	5,8015219449E-03	1,3495330216E-03	$\xi_4 \times \xi_6 \times \xi_9$
126	-1,0693053956E-04	-2,3031605046E-04	5,3830908090E-03	$\xi_4 \times \xi_7 \times \xi_8$
127	-3,0001594054E-06	-7,6278198590E-04	-8,8675447112E-04	$\xi_4 \times \xi_7 \times \xi_9$
128	1,3628600531E-05	6,5733483004E-03	7,5183437053E-03	$\xi_4 \times \xi_8 \times \xi_9$
129	-1,8932024033E-04	1,6519149045E-02	2,9198216397E-03	$\xi_5 \times \xi_6 \times \xi_7$
130	1,8137284338E-04	-2,7555294366E-02	-1,0649686391E-02	$\xi_5 \times \xi_6 \times \xi_8$
131	1,3176471906E-04	-1,7374808065E-02	-3,3387346685E-03	$\xi_5 \times \xi_6 \times \xi_9$
132	-5,9664451924E-06	9,9668718477E-04	-9,5875970140E-03	$\xi_5 \times \xi_7 \times \xi_8$
133	-1,8233838697E-06	-1,7975684389E-03	-4,8079247942E-04	$\xi_5 \times \xi_7 \times \xi_9$
134	-5,3566262692E-06	-5,1927766277E-04	2,0300100784E-03	$\xi_5 \times \xi_8 \times \xi_9$
135	-3,3870412839E-05	1,3894491490E-02	3,0465453300E-03	$\xi_6 \times \xi_7 \times \xi_8$
136	-9,1173221909E-06	1,9269465770E-03	-3,6263576762E-03	$\xi_6 \times \xi_7 \times \xi_9$
137	2,4501939615E-05	-3,2508869684E-03	1,9184641771E-03	$\xi_6 \times \xi_8 \times \xi_9$
138	3,9130407725E-06	-1,9347899566E-02	-1,3829057455E-02	$\xi_7 \times \xi_8 \times \xi_9$
139	1,7753841119E-06	2,1489703580E-03	-1,2365738626E-03	$0.5 \times (3\xi_1^2 - 1) \times \xi_2$
140	1,0887448743E-05	1,1714123186E-02	1,7965250323E-03	$0.5 \times (3\xi_1^2 - 1) \times \xi_3$
141	-7,9656744326E-06	7,5867359768E-03	2,1378884858E-03	$0.5 \times (3\xi_1^2 - 1) \times \xi_4$
142	2,8302810437E-08	-6,0447416559E-03	-5,8122562592E-03	$0.5 \times (3\xi_1^2 - 1) \times \xi_5$
143	8,6339198118E-06	-3,6027418035E-03	-5,7031614934E-03	$0.5 \times (3\xi_1^2 - 1) \times \xi_6$
144	2,9381230638E-06	5,4155740707E-03	3,4711365738E-03	$0.5 \times (3\xi_1^2 - 1) \times \xi_7$
145	8,4155576074E-06	-2,3559895176E-03	-2,4957799512E-03	$0.5 \times (3\xi_1^2 - 1) \times \xi_8$
146	-2,0317520162E-06	6,8448949377E-03	6,8679031993E-03	$0.5 \times (3\xi_1^2 - 1) \times \xi_9$
147	2,1492268952E-06	3,4310777256E-03	4,0102915743E-04	$0.5 \times (3\xi_2^2 - 1) \times \xi_1$
148	-1,6117073701E-07	2,0464816967E-03	1,3407317083E-03	$0.5 \times (3\xi_2^2 - 1) \times \xi_3$
149	-2,1206142574E-05	-4,8748026593E-03	-2,0576930835E-03	$0.5 \times (3\xi_2^2 - 1) \times \xi_4$
150	1,4612724010E-05	-3,1375817472E-03	4,4154544935E-03	$0.5 \times (3\xi_2^2 - 1) \times \xi_5$
151	3,4699289374E-05	-4,3189401090E-03	-1,5798724356E-03	$0.5 \times (3\xi_2^2 - 1) \times \xi_6$
152	-1,5824100971E-05	3,1995124992E-03	-2,4521257001E-03	$0.5 \times (3\xi_2^2 - 1) \times \xi_7$
153	1,4502192650E-05	4,6589497106E-03	1,0681207109E-03	$0.5 \times (3\xi_2^2 - 1) \times \xi_8$
154	8,8158368316E-06	2,3617520579E-03	3,3097205288E-03	$0.5 \times (3\xi_2^2 - 1) \times \xi_9$
155	9,7201128508E-06	-5,6239034286E-03	-5,3166238828E-04	$0.5 \times (3\xi_3^2 - 1) \times \xi_1$
156	1,3481285463E-05	4,8505086130E-03	4,2176402203E-03	$0.5 \times (3\xi_3^2 - 1) \times \xi_2$
157	2,4357690451E-06	2,3046838197E-03	5,1116974642E-04	$0.5 \times (3\xi_3^2 - 1) \times \xi_4$
158	1,9571930681E-05	-5,6621115633E-03	-5,8814144886E-04	$0.5 \times (3\xi_3^2 - 1) \times \xi_5$
159	2,7101387588E-05	2,8182611981E-03	2,4241170244E-03	$0.5 \times (3\xi_3^2 - 1) \times \xi_6$
160	5,4322369416E-06	-2,7168790540E-03	2,8337580512E-04	$0.5 \times (3\xi_3^2 - 1) \times \xi_7$
161	3,4265585140E-06	-2,9017977376E-03	-2,6918440061E-04	$0.5 \times (3\xi_3^2 - 1) \times \xi_8$
162	-1,3409978897E-06	-1,0524409743E-02	-3,3271016735E-03	$0.5 \times (3\xi_3^2 - 1) \times \xi_9$
163	4,5608985979E-06	-3,1135499888E-04	2,5803085477E-04	$0.5 \times (3\xi_4^2 - 1) \times \xi_1$
164	2,2188166846E-05	9,4114839212E-03	8,8686342117E-03	$0.5 \times (3\xi_4^2 - 1) \times \xi_2$
165	2,7790327285E-05	2,6248697135E-03	2,2152333056E-03	$0.5 \times (3\xi_4^2 - 1) \times \xi_3$

Tableau C. 8 : Coefficients du modèle de substitution de calcul de  $\varepsilon V(t)$  en conditions accélérées (4/4)

$i$	$a_i^{\varepsilon_{VMax}}$	$a_i^{\tau_c}$	$a_i^{\tau_L}$	$\Psi_i^{Legendre}$
166	5,4376581770E-05	-3,7200542245E-03	1,2478556569E-02	$0.5 \times (3\xi_4^2 - 1) \times \xi_5$
167	9,2119247154E-05	-1,0545559658E-02	-6,4087545403E-03	$0.5 \times (3\xi_4^2 - 1) \times \xi_6$
168	1,0599877950E-05	-6,1732585239E-03	-5,4593122471E-03	$0.5 \times (3\xi_4^2 - 1) \times \xi_7$
169	5,1406819955E-06	-1,5159297481E-03	4,0935816014E-03	$0.5 \times (3\xi_4^2 - 1) \times \xi_8$
170	6,3636625448E-07	4,0517031321E-03	4,0254950736E-04	$0.5 \times (3\xi_4^2 - 1) \times \xi_9$
171	-7,4940422058E-06	-7,6907296393E-04	-3,8666893963E-03	$0.5 \times (3\xi_5^2 - 1) \times \xi_1$
172	6,9745524954E-05	7,0303087255E-04	1,0347267928E-02	$0.5 \times (3\xi_5^2 - 1) \times \xi_2$
173	4,5866069972E-05	5,9016188441E-03	-3,4007960915E-04	$0.5 \times (3\xi_5^2 - 1) \times \xi_3$
174	-3,2175252605E-05	-8,7015940276E-03	-1,9614759969E-02	$0.5 \times (3\xi_5^2 - 1) \times \xi_4$
175	1,5334255584E-04	-1,3296962054E-02	6,6171286057E-03	$0.5 \times (3\xi_5^2 - 1) \times \xi_6$
176	-1,9220043401E-05	6,4131566545E-03	-8,5172207341E-03	$0.5 \times (3\xi_5^2 - 1) \times \xi_7$
177	3,0795122519E-05	-7,7299424025E-03	3,9688025328E-03	$0.5 \times (3\xi_5^2 - 1) \times \xi_8$
178	1,0057169811E-05	1,3071725680E-03	6,9563884923E-03	$0.5 \times (3\xi_5^2 - 1) \times \xi_9$
179	-1,3679344331E-05	6,1037745441E-03	-4,6120078201E-03	$0.5 \times (3\xi_6^2 - 1) \times \xi_1$
180	1,5159683876E-04	-1,8483405121E-02	-7,6660222207E-03	$0.5 \times (3\xi_6^2 - 1) \times \xi_2$
181	1,1179178572E-04	-1,0366839223E-02	-2,1473829512E-02	$0.5 \times (3\xi_6^2 - 1) \times \xi_3$
182	-1,0949531284E-04	2,2721318401E-02	1,2377228250E-02	$0.5 \times (3\xi_6^2 - 1) \times \xi_4$
183	2,4373903750E-04	-3,1605282410E-02	-2,7761617352E-02	$0.5 \times (3\xi_6^2 - 1) \times \xi_5$
184	-6,3092037188E-05	1,5526851134E-02	6,0240055492E-03	$0.5 \times (3\xi_6^2 - 1) \times \xi_7$
185	4,8013312197E-05	-9,9614427207E-03	-5,3344069429E-03	$0.5 \times (3\xi_6^2 - 1) \times \xi_8$
186	3,7296311244E-05	-1,8385227009E-02	1,1345144078E-02	$0.5 \times (3\xi_6^2 - 1) \times \xi_9$
187	5,1681005886E-06	8,7207279928E-04	-2,7368953757E-03	$0.5 \times (3\xi_7^2 - 1) \times \xi_1$
188	1,2324972692E-05	3,5753901606E-04	3,5893128938E-03	$0.5 \times (3\xi_7^2 - 1) \times \xi_2$
189	3,0636288359E-06	-3,6872560953E-03	-4,3012018145E-03	$0.5 \times (3\xi_7^2 - 1) \times \xi_3$
190	3,3062885099E-06	5,9370614095E-04	-5,9554424331E-04	$0.5 \times (3\xi_7^2 - 1) \times \xi_4$
191	1,6487187292E-05	1,8487688789E-04	2,0432039796E-03	$0.5 \times (3\xi_7^2 - 1) \times \xi_5$
192	2,3930610884E-05	-2,0606326725E-03	-2,6366854380E-03	$0.5 \times (3\xi_7^2 - 1) \times \xi_6$
193	-1,4702954759E-06	4,3151664176E-04	5,2644252323E-03	$0.5 \times (3\xi_7^2 - 1) \times \xi_8$
194	-2,7014401678E-07	1,2457423653E-04	5,0003834916E-03	$0.5 \times (3\xi_7^2 - 1) \times \xi_9$
195	-5,9632459425E-06	5,3885877102E-03	1,1383938355E-05	$0.5 \times (3\xi_8^2 - 1) \times \xi_1$
196	1,4668651726E-07	-2,5937265026E-03	-1,8384556635E-03	$0.5 \times (3\xi_8^2 - 1) \times \xi_2$
197	7,6062098256E-06	-4,4916824795E-03	3,8936189579E-03	$0.5 \times (3\xi_8^2 - 1) \times \xi_3$
198	6,0474531192E-05	-3,1863442911E-03	1,1497476817E-03	$0.5 \times (3\xi_8^2 - 1) \times \xi_4$
199	1,9663641173E-06	-2,3278260685E-03	3,3046489642E-03	$0.5 \times (3\xi_8^2 - 1) \times \xi_5$
200	1,1993091969E-05	-1,4087052379E-03	2,7417090284E-03	$0.5 \times (3\xi_8^2 - 1) \times \xi_6$
201	3,0134271608E-05	-2,0871636067E-03	-5,6244323628E-03	$0.5 \times (3\xi_8^2 - 1) \times \xi_7$
202	-2,6233491049E-06	6,5299771065E-03	2,8965738452E-03	$0.5 \times (3\xi_8^2 - 1) \times \xi_9$
203	4,2621901927E-07	-1,1480935116E-02	-1,4916276262E-02	$0.5 \times (3\xi_9^2 - 1) \times \xi_1$
204	2,6310486080E-05	4,2199477407E-04	-4,3887374231E-03	$0.5 \times (3\xi_9^2 - 1) \times \xi_2$
205	7,9939581977E-06	8,3405478476E-03	7,7154076053E-03	$0.5 \times (3\xi_9^2 - 1) \times \xi_3$
206	-1,9482372019E-05	5,4656561161E-03	7,0162152720E-03	$0.5 \times (3\xi_9^2 - 1) \times \xi_4$
207	5,3078173852E-05	-6,7880449366E-03	-6,8373796294E-03	$0.5 \times (3\xi_9^2 - 1) \times \xi_5$
208	6,6930895983E-05	-1,0903498567E-02	-1,4988885487E-02	$0.5 \times (3\xi_9^2 - 1) \times \xi_6$
209	-1,2178363083E-05	-8,5076834684E-03	-5,5298637572E-03	$0.5 \times (3\xi_9^2 - 1) \times \xi_7$
210	5,0026747048E-06	7,7439211694E-03	3,9109346032E-03	$0.5 \times (3\xi_9^2 - 1) \times \xi_8$
211	4,9856836507E-06	5,4557970701E-03	3,4870315733E-03	$0.5 \times (5\xi_1^3 - 3\xi_1)$
212	-9,4881976814E-06	5,5827192920E-04	1,2786547000E-03	$0.5 \times (5\xi_2^3 - 3\xi_2)$
213	-2,4504306054E-06	-1,5298577292E-03	-1,0853714460E-03	$0.5 \times (5\xi_3^3 - 3\xi_3)$
214	-9,5623430127E-06	-7,2110967854E-04	-3,0402649775E-03	$0.5 \times (5\xi_4^3 - 3\xi_4)$
215	-2,8489486445E-06	7,7763597381E-03	1,4593662942E-02	$0.5 \times (5\xi_5^3 - 3\xi_5)$
216	1,4393187023E-05	-1,1500580088E-02	1,3341225731E-02	$0.5 \times (5\xi_6^3 - 3\xi_6)$
217	-5,7042892634E-06	-3,5041890124E-03	1,8744922185E-04	$0.5 \times (5\xi_7^3 - 3\xi_7)$
218	-1,6934147088E-05	-8,8883363134E-04	-4,7072376846E-04	$0.5 \times (5\xi_8^3 - 3\xi_8)$
219	2,6152226286E-05	1,7084798939E-01	1,6459005179E-01	$0.5 \times (5\xi_9^3 - 3\xi_9)$

## Annexe D

### Éléments complémentaires pour la prise en compte de l'anisotropie de la RAG sous chargement



D. 1.	NEUF EXEMPLES DETAILLES DE DETERMINATION DE FONCTIONS POIDS DE [SAOUMA & PEROTTI 2006]	226
D. 2.	NEUF EXEMPLES DETAILLES DE DETERMINATION DE FONCTIONS POIDS QUE NOUS PROPOSONS AVEC LES MEMES DONNEES QUE PRECEDEMMENT .....	229
D. 3.	PROCEDURE IMPLEMENTANT LES FONCTIONS POIDS PROPOSEES SOUS CAST3M .....	231
D. 4.	DEFINITION DU CONTACT CYLINDRIQUE UNILATERAL SOUS CAST3M .....	234



### D.1. Neuf exemples détaillés de détermination de fonctions poids de [Saouma & Perotti 2006]

**Exemple 1 :**  $[\sigma_k = -7, \sigma_l = 1, \sigma_m = -20, \sigma_u = -10, f_c = -30, f_t = 2]$  MPa se trouvant à l'intérieur du quadrant 11-4-9-10, voir Figure IV.1.

$$W_{11}(\sigma_k = -7) = 0 + \left( \frac{-30 - (-7)}{-30 - (-10)} \right) \left( \frac{1}{2} - 0 \right) = \frac{23}{40}, W_4(\sigma_k = -7) = 0 + \left( \frac{-30 - (-7)}{-30 - (-10)} \right) \left( \frac{1}{2} - 0 \right) = \frac{23}{40}$$

$$W_9(\sigma_k = -7) = 0 + \left( \frac{-30 - (-7)}{-30 - (-10)} \right) \left( \frac{1}{2} - 0 \right) = \frac{23}{40}, W_{10}(\sigma_k = -7) = 0 + \left( \frac{-30 - (-7)}{-30 - (-10)} \right) \left( \frac{1}{2} - 0 \right) = \frac{23}{40}$$

Dans ce cas la largeur du cadrant est  $a = a_1 = 2$  MPa et sa hauteur  $b = b_3 = -20$  MPa

$$N_{11}(1, -20) = \frac{(2-1)(-20-(-10))}{-40} = \frac{1}{4}, N_4(1, -20) = \frac{1(-20+10)}{-40} = \frac{1}{4}$$

$$N_9(1, -20) = \frac{1(-10)}{-40} = \frac{1}{4}, N_{10}(1, -20) = \frac{-10(2-1)}{-40} = \frac{1}{4}$$

$$W_k(\sigma_l = 1, \sigma_m = -20, \sigma_k = -7) = \sum_{i=11,4,9,10} N_i(\sigma_l, \sigma_m) W_i(\sigma_k) = \frac{23}{160} + \frac{23}{160} + \frac{23}{160} + \frac{23}{160} = \frac{23}{40} = 0.575$$

$$W_l = 1 - W_k = 0.425, \quad W_m = 0$$

**Exemple 2 :**  $[\sigma_k = 1, \sigma_l = -4, \sigma_m = -25, \sigma_u = -10, f_c = -30, f_t = 2]$  MPa se trouvant à l'intérieur du quadrant 4-3-8-9, voir Figure IV.1.

$$W_4(\sigma_k = 1) = \frac{1}{2}, W_3(\sigma_k = 1) = 1, W_8(\sigma_k = 1) = 1, W_9(\sigma_k = 1) = \frac{1}{2}$$

Dans ce cas la largeur du cadrant est  $a = a_2 = -10$  MPa et sa hauteur  $b = b_3 = -20$  MPa

$$N_4(-4, -25) = \frac{(-10+4)(-20+5)}{200} = \frac{9}{20}, N_3(-4, -25) = \frac{-4(-20+5)}{200} = \frac{3}{10}$$

$$N_8(-4, -25) = \frac{-4(-5)}{200} = \frac{1}{10}, N_9(-4, -25) = \frac{-5(-10+4)}{200} = \frac{3}{20}$$

$$W_k(\sigma_l = -4, \sigma_m = -25, \sigma_k = 1) = \sum_{i=4,3,8,9} N_i(\sigma_l, \sigma_m) W_i(\sigma_k) = \frac{9}{40} + \frac{3}{10} + \frac{1}{10} + \frac{3}{40} = 0.7$$

$$W_l = 1 - W_k = 0.3, \quad W_m = 0$$

**Exemple 3 :**  $[\sigma_k = -11, \sigma_l = -20, \sigma_m = -20, f_c = -30, f_t = 2]$  MPa se trouvant à l'intérieur du quadrant 3-6-7-8, voir Figure IV.1.  $\sigma_u = -10$  MPa,  $f_c = -30$  MPa

$$W_3(\sigma_k = -11) = 0 + \left( \frac{-30 - (-11)}{-30 - (-10)} \right) \left( \frac{1}{3} - 0 \right) = \frac{19}{60}, W_6(\sigma_k = -11) = 0 + \left( \frac{-30 - (-11)}{-30 - (-10)} \right) \left( \frac{1}{2} - 0 \right) = \frac{19}{40}$$

$$W_7(\sigma_k = -11) = \frac{1}{3} + \left( \frac{-30 - (-11)}{-30 - (-10)} \right) \left( 1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{29}{30}, W_8(\sigma_k = -11) = 0 + \left( \frac{-30 - (-11)}{-30 - (-10)} \right) \left( \frac{1}{2} - 0 \right) = \frac{19}{40}$$

Dans ce cas la largeur du cadrant est  $a = a_3$  et sa hauteur  $b = b_3$ , donc  $a = b = -20$  MPa

$$N_3(-20, -20) = \frac{(-20+10)(-20+10)}{400} = \frac{1}{4}, N_6(-20, -20) = \frac{-10(-20+10)}{400} = \frac{1}{4},$$

$$N_7(-20, -20) = \frac{-10(-10)}{400} = \frac{1}{4}, N_8(-20, -20) = \frac{-10(-20+10)}{400} = \frac{1}{4}.$$

$$W_k(\sigma_l = -20, \sigma_m = -20, \sigma_k = -11) = \sum_{i=3,6,7,8} N_i(\sigma_l, \sigma_m) W_i(\sigma_k) = \frac{1}{4} \left( \frac{19}{60} + \frac{19}{40} + \frac{29}{30} + \frac{19}{40} \right) = 0.55833$$

$$W_l = W_m = \frac{1-W_k}{2} = 0,22084$$

**Exemple 4 :**  $[\sigma_k = -6, \sigma_l = 1, \sigma_m = -5, \sigma_u = -10, f_c = -30, f_t = 2]$  MPa se trouvant à l'intérieur du quadrant 12-1-4-11, voir Figure IV.1.

$$W_{12}(\sigma_k = -6) = 0 + \left(\frac{-10-(-6)}{-10}\right)\left(\frac{1}{3} - 0\right) = \frac{2}{15}, W_1(\sigma_k = -6) = 0 + \left(\frac{-10-(-6)}{-10}\right)\left(\frac{1}{2} - 0\right) = \frac{1}{5}$$

$$W_4(\sigma_k = -6) = 0 + \left(\frac{-10-(-6)}{-10}\right)\left(\frac{1}{2} - 0\right) = \frac{1}{5}, W_{11}(\sigma_k = -6) = 0 + \left(\frac{-10-(-6)}{-10}\right)\left(\frac{1}{2} - 0\right) = \frac{1}{5}$$

Dans ce cas la largeur du cadrant est  $a = a_1 = 2$  MPa et sa hauteur  $b = b_2 = -10$  MPa

$$N_{12}(1, -5) = \frac{(2-1)(-10+5)}{-20} = \frac{1}{4}, N_1(1, -5) = \frac{1(-10+5)}{-20} = \frac{1}{4}$$

$$N_4(1, -5) = \frac{1(-5)}{-20} = \frac{1}{4}, N_{11}(1, -5) = \frac{-5(2-1)}{-20} = \frac{1}{4}$$

$$W_k(\sigma_l = 1, \sigma_m = -5, \sigma_k = -6) = \sum_{i=12,1,4,11} N_i(\sigma_l, \sigma_m) W_i(\sigma_k) = \frac{1}{4} \left( \frac{2}{15} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \right) = 0,18333$$

$$W_l = ?, W_m = ?$$

**Exemple 5 :**  $[\sigma_k = -5, \sigma_l = -5, \sigma_m = -8, f_c = -30, f_t = 2]$  MPa se trouvant à l'intérieur du quadrant 1-2-3-4, voir Figure IV.1.

$$W_1(\sigma_k = -5) = 0 + \left(\frac{-10-(-5)}{-10}\right)\left(\frac{1}{3} - 0\right) = \frac{1}{6}, W_2(\sigma_k = -5) = 0 + \left(\frac{-10-(-5)}{-10}\right)\left(\frac{1}{2} - 0\right) = \frac{1}{4}$$

$$W_3(\sigma_k = -5) = \frac{1}{3} + \left(\frac{-10-(-5)}{-10}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}, W_4(\sigma_k = -5) = 0 + \left(\frac{-10-(-5)}{-10}\right)\left(\frac{1}{2} - 0\right) = \frac{1}{4}$$

Dans ce cas la largeur du cadrant est  $a = a_2$  et sa hauteur  $b = b_2$ , donc  $a = b = -10$  MPa

$$N_1(-5, -8) = \frac{(-10+5)(-10+8)}{100} = \frac{1}{10}, N_2(-5, -8) = \frac{-5(-10+8)}{100} = \frac{1}{10},$$

$$N_3(-5, -8) = \frac{-5(-8)}{100} = \frac{4}{10}, N_4(-5, -8) = \frac{-5(-10+5)}{100} = \frac{4}{10}.$$

$$W_k(\sigma_l = -5, \sigma_m = -8, \sigma_k = -5) = \sum_{i=1,2,3,4} N_i(\sigma_l, \sigma_m) W_i(\sigma_k) = \frac{1}{10} \frac{1}{6} + \frac{1}{10} \frac{1}{4} + \frac{4}{10} \frac{2}{3} + \frac{4}{10} \frac{1}{4} = 0,40833$$

$$W_l = ?, W_m = ?$$

**Exemple 6 :**  $[\sigma_k = -6, \sigma_l = -15, \sigma_m = -2, \sigma_u = -10, f_c = -30, f_t = 2]$  MPa se trouvant à l'intérieur du quadrant 2-5-6-3, voir Figure IV.1.

$$W_2(\sigma_k = -6) = 0 + \left(\frac{-10-(-6)}{-10}\right)\left(\frac{1}{2} - 0\right) = \frac{1}{5}, W_5(\sigma_k = -6) = 0 + \left(\frac{-10-(-6)}{-10}\right)\left(\frac{1}{2} - 0\right) = \frac{1}{5}$$

$$W_6(\sigma_k = -6) = \frac{1}{2} + \left(\frac{-10-(-6)}{-10}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{10}, W_3(\sigma_k = -6) = \frac{1}{3} + \left(\frac{-10-(-6)}{-10}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{9}{15}$$

Dans ce cas la largeur du cadrant est  $a = a_3 = -20$  MPa et sa hauteur  $b = b_2 = -10$  MPa

$$N_2(-15, -2) = \frac{(-20+15)(-10+2)}{200} = \frac{1}{5}, N_5(-15, -2) = \frac{-15(-10+2)}{200} = \frac{3}{5}$$

$$N_6(-15, -2) = \frac{-15(-2)}{200} = \frac{3}{20}, N_3(-15, -2) = \frac{-2(-20+15)}{200} = \frac{1}{20}$$

$$W_k(\sigma_l = -15, \sigma_m = -2, \sigma_k = -6) = \sum_{i=2,5,6,3} N_i(\sigma_l, \sigma_m) W_i(\sigma_k) = \frac{1}{5} \frac{1}{5} + \frac{3}{5} \frac{1}{5} + \frac{7}{10} \frac{3}{20} + \frac{1}{20} \frac{9}{15} = 0,295$$

$$W_l = ?, W_m = ?$$

**Exemple 7 :**  $[\sigma_k = -6, \sigma_l = 1, \sigma_m = 1, \sigma_u = -10, f_c = -30, f_t = 2]$  MPa se trouvant à l'intérieur du quadrant 13-14-1-12, voir Figure IV.1.

$$W_{13}(\sigma_k = -6) = 0 + \left( \frac{-10 - (-6)}{-10} \right) \left( \frac{1}{3} - 0 \right) = \frac{2}{15}, W_{14}(\sigma_k = -6) = 0 + \left( \frac{-10 - (-6)}{-10} \right) \left( \frac{1}{3} - 0 \right) = \frac{2}{15}$$

$$W_1(\sigma_k = -6) = 0 + \left( \frac{-10 - (-6)}{-10} \right) \left( \frac{1}{3} - 0 \right) = \frac{2}{15}, W_{12}(\sigma_k = -6) = 0 + \left( \frac{-10 - (-6)}{-10} \right) \left( \frac{1}{3} - 0 \right) = \frac{2}{15}$$

Dans ce cas la largeur du cadran est  $a = a_1 = 2\text{MPa}$  et sa hauteur  $b = b_1 = 2\text{MPa}$

$$N_{13}(1,1) = \frac{(2-1)(2-1)}{4} = \frac{1}{4}, N_{14}(1,1) = \frac{1(2-1)}{4} = \frac{1}{4}, N_1(1,1) = \frac{1}{4}, N_{12}(1,1) = \frac{1(2-1)}{4} = \frac{1}{4}$$

$$W_k(\sigma_l = 1, \sigma_m = 1, \sigma_k = -6) = \sum_{i=12,14,1,12} N_i(\sigma_l, \sigma_m) W_i(\sigma_k) = \frac{1}{4} \left( \frac{2}{15} + \frac{2}{15} + \frac{2}{15} + \frac{2}{15} \right) = 0,13333$$

$$W_l = W_m = \frac{1-W_k}{2} = 0,43333$$

**Exemple 8 :**  $[\sigma_k = -6, \sigma_l = -5, \sigma_m = 1, \sigma_u = -10, f_c = -30, f_t = 2]$  MPa se trouvant à l'intérieur du quadrant 14-15-2-1, voir Figure IV.1.

$$W_{14}(\sigma_k = -6) = 0 + \left( \frac{-10 - (-6)}{-10} \right) \left( \frac{1}{3} - 0 \right) = \frac{2}{15}, W_{15}(\sigma_k = -6) = 0 + \left( \frac{-10 - (-6)}{-10} \right) \left( \frac{1}{2} - 0 \right) = \frac{1}{5}$$

$$W_2(\sigma_k = -6) = 0 + \left( \frac{-10 - (-6)}{-10} \right) \left( \frac{1}{2} - 0 \right) = \frac{1}{5}, W_1(\sigma_k = -6) = 0 + \left( \frac{-10 - (-6)}{-10} \right) \left( \frac{1}{3} - 0 \right) = \frac{2}{15}$$

Dans ce cas la largeur du cadran est  $a = a_2 = -10\text{MPa}$  et sa hauteur  $b = b_1 = 2\text{MPa}$

$$N_{14}(-5,1) = \frac{(-10+5)(2-1)}{-20} = \frac{1}{4}, N_{15}(-5,1) = \frac{-5(2-1)}{-20} = \frac{1}{4}, N_2(-5,1) = \frac{-5(1)}{-20} = \frac{1}{4}, N_1(-5,1) = \frac{1(-10+5)}{-20} = \frac{1}{4}$$

$$W_k(\sigma_l = -5, \sigma_m = 1, \sigma_k = -6) = \sum_{i=14,15,2,1} N_i(\sigma_l, \sigma_m) W_i(\sigma_k) = \frac{1}{4} \left( \frac{2}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{2}{15} \right) = 0,1$$

$$W_l = ?, W_m = ?$$

**Exemple 9 :**  $[\sigma_k = -20, \sigma_l = -25, \sigma_m = 1, \sigma_u = -10, f_c = -30, f_t = 2]$  MPa se trouvant à l'intérieur du quadrant 15-16-5-2, voir Figure IV.1.

$$W_{15}(\sigma_k = -20) = 0 + \left( \frac{-30 - (-20)}{-30 - (-10)} \right) (0 - 0) = 0, W_{16}(\sigma_k = -20) = 0 + \left( \frac{-30 - (-20)}{-30 - (-10)} \right) (0 - 0) = 0$$

$$W_5(\sigma_k = -20) = 0 + \left( \frac{-30 - (-20)}{-30 - (-10)} \right) (0 - 0) = 0, W_2(\sigma_k = -20) = 0 + \left( \frac{-30 - (-20)}{-30 - (-10)} \right) (0 - 0) = 0$$

Dans ce cas la largeur du cadran est  $a = a_3 = -20\text{MPa}$  et sa hauteur  $b = b_1 = 2\text{Pa}$

$$N_{15}(-25,1) = \frac{(-20+5)(2-1)}{-40} = \frac{15}{40}, N_{16}(-25,1) = \frac{-5(2-1)}{-40} = \frac{1}{8}$$

$$N_5(-25,1) = \frac{-5}{-40} = \frac{1}{8}, N_2(-25,1) = \frac{1(-20+5)}{-40} = \frac{15}{40}$$

$$W_k(\sigma_l = -25, \sigma_m = 1, \sigma_k = -20) = \sum_{i=15,16,5,2} N_i(\sigma_l, \sigma_m) W_i(\sigma_k) = 0$$

$$W_l = 0, W_k = 0, W_m = 1$$

## D.2. Neuf exemples détaillés de détermination de fonctions poids que nous proposons avec les mêmes données que précédemment

**Exemple 1 :**  $[\sigma_I = \sigma_l = 1, \sigma_{II} = \sigma_k = -7, \sigma_{III} = \sigma_m = -20, \sigma_u = -10, f_c = -30, f_t = 2]$  MPa se trouvant à l'intérieur du quadrant 4-9-10-11, voir Figure IV.1.

Dans ce cas,  $\sigma_I \geq 0, \sigma_u < \sigma_{II} < 0, f_c < \sigma_{III} < \sigma_u$

$$\text{On a : } w_I = 1 - w_{II}, w_{II} = \frac{1}{2} - \frac{\sigma_{II}}{2\sigma_u}, w_{III} = 0$$

$$w_{II} = \frac{1}{2} - \frac{-7}{2(-10)} = \frac{1}{2} - \frac{7}{20} = \frac{20-14}{40} = \frac{3}{20} = 0,15, w_I = 1 - 0,15 = 0,85, w_{III} = 0$$

$$w_k = w_{II} = 0,15, w_l = w_I = 0,85, w_m = w_{III} = 0$$

**Exemple 2 :**  $[\sigma_I = \sigma_k = 1, \sigma_{II} = \sigma_l = -4, \sigma_{III} = \sigma_m = -25, \sigma_u = -10, f_c = -30, f_t = 2]$  MPa se trouvant à l'intérieur du quadrant 3-8-9-4, voir Figure IV.1.

Ici,  $\sigma_I \geq 0, \sigma_u < \sigma_{II} < 0, f_c < \sigma_{III} < \sigma_u$

$$\text{On a : } w_I = 1 - w_{II}, w_{II} = \frac{1}{2} - \frac{\sigma_{II}}{2\sigma_u}, w_{III} = 0$$

$$w_{II} = \frac{1}{2} - \frac{-4}{2(-10)} = \frac{1}{2} - \frac{4}{20} = \frac{20-8}{40} = \frac{12}{40} = \frac{3}{10} = 0,3, w_I = 1 - 0,3 = 0,7, w_{III} = 0$$

$$w_k = w_I = 0,7, w_l = w_{II} = 0,3, w_m = w_{III} = 0.$$

**Exemple 3 :**  $[\sigma_I = \sigma_k = -11, \sigma_l = \sigma_{II} = -20, \sigma_m = \sigma_{III} = -20, \sigma_u = -10, f_c = -30]$  MPa se trouvant à l'intérieur du quadrant 3-6-7-8, voir Figure IV.1.

Dans ce cas,  $f_c < \sigma_I < \sigma_u, f_c < \sigma_{II} < \sigma_u, f_c < \sigma_{III} < \sigma_u$

$$\text{On a : } w_I = \frac{\sigma_I - f_c}{\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} - 3f_c}, w_{II} = \frac{\sigma_{II} - f_c}{\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} - 3f_c}, w_{III} = \frac{\sigma_{III} - f_c}{\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} - 3f_c}$$

$$w_I = \frac{-11 - (-30)}{-11 + (-20) + (-20) - 3(-30)} = \frac{19}{39} = 0,48717, w_{II} = \frac{-20 - (-30)}{-11 + (-20) + (-20) - 3(-30)} = \frac{10}{39} = 0,25641,$$

$$w_{III} = \frac{-20 - (-30)}{-11 + (-20) + (-20) - 3(-30)} = \frac{10}{39} = 0,25641$$

$$w_k = w_I = 0,48717, w_l = w_{II} = 0,25641, w_m = w_{III} = 0,25641$$

**Exemple 4 :**  $[\sigma_I = \sigma_l = 1, \sigma_{II} = \sigma_m = -5, \sigma_{III} = \sigma_k = -6, \sigma_u = -10, f_c = -30]$  MPa se trouvant à l'intérieur du quadrant 1-4-11-12, voir Figure IV.1.

Dans ce cas,  $\sigma_I \geq 0, \sigma_u < \sigma_{II} < 0, \sigma_u < \sigma_{III} < 0$

$$\text{On a : } w_{III} = \frac{1}{3} - \frac{\sigma_{III}}{3\sigma_u}, w_{II} = \frac{1}{3} - \frac{\sigma_{II}}{3\sigma_u}, w_I = 1 - w_{II} - w_{III}$$

$$w_{III} = \frac{1}{3} - \frac{-6}{3(-10)} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{5-3}{15} = \frac{2}{15} = 0,13333, w_{II} = \frac{1}{3} - \frac{-5}{3(-10)} = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{6-3}{18} = \frac{1}{6} = 0,16666$$

$$w_I = 1 - 0,16666 - 0,13333 = 0,7$$

$$w_k = w_{III} = 0,13333, w_l = w_I = 0,7, w_m = w_{II} = 0,16666,$$

**Exemple 5 :**  $[\sigma_I = \sigma_l = -5, \sigma_{II} = \sigma_k = -5, \sigma_{III} = \sigma_m = -8, \sigma_u = -10, f_c = -30]$  MPa se trouvant à l'intérieur du quadrant 1-2-3-4, voir Figure IV.1.

Dans ce cas,  $\sigma_u < \sigma_I < 0, \sigma_u < \sigma_{II} < 0, \sigma_u < \sigma_{III} < 0$

$$\text{On a : } w_I = \frac{\sigma_I - \sigma_u}{\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} - 3\sigma_u}, w_{II} = \frac{\sigma_{II} - \sigma_u}{\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} - 3\sigma_u}, w_{III} = \frac{\sigma_{III} - \sigma_u}{\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} - 3\sigma_u}$$

$$w_I = \frac{-5 - (-10)}{-5 + (-5) + (-8) - 3(-10)} = \frac{5}{12} = 0,41666, w_{II} = \frac{-5 - (-10)}{-5 + (-5) + (-8) - 3(-10)} = \frac{5}{12} = 0,41666$$

$$w_{III} = \frac{-8 - (-10)}{-5 + (-5) + (-8) - 3(-10)} = \frac{1}{6} = 0,16666$$

$$w_k = w_{II} = 0,41666, w_l = w_I = 0,41666, w_m = w_{III} = 0,16666$$

**Exemple 6 :**  $[\sigma_I = \sigma_m = -2, \sigma_{II} = \sigma_k = -6, \sigma_{III} = \sigma_l = -15, \sigma_u = -10, f_c = -30]$  MPa se trouvant à l'intérieur du quadrant 2-5-6-3, voir [Figure IV.1](#).

Dans ce cas,  $\sigma_u < \sigma_I < 0, \sigma_u < \sigma_{II} < 0, f_c < \sigma_{III} < \sigma_u$

$$\text{On a : } w_I = \frac{\sigma_I - \sigma_u}{\sigma_I + \sigma_{II} - 2\sigma_u}, w_{II} = \frac{\sigma_{II} - \sigma_u}{\sigma_I + \sigma_{II} - 2\sigma_u}, w_{III} = 0$$

$$w_I = \frac{-2 - (-10)}{-2 + (-6) - 2(-10)} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} = 0,66666, w_{II} = \frac{-6 - (-10)}{-2 + (-6) - 2(-10)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} = 0,33333$$

$$w_k = w_{II} = 0,33333, w_l = w_{III} = 0, w_m = w_I = 0,66666$$

**Exemple 7 :**  $[\sigma_I = \sigma_l = 1, \sigma_{II} = \sigma_m = 1, \sigma_{III} = \sigma_k = -6, \sigma_u = -10, f_c = -30]$  MPa se trouvant à l'intérieur du quadrant 13-14-1-12, voir [Figure IV.1](#).

Dans ce cas,  $\sigma_I \geq 0, \sigma_{II} \geq 0, \sigma_u < \sigma_{III} < 0$

$$\text{On a : } w_{III} = \frac{1}{3} - \frac{\sigma_{III}}{3\sigma_u}, w_I = w_{II} = \frac{1 - w_{III}}{2}$$

$$w_{III} = \frac{1}{3} - \frac{-6}{3(-10)} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15} = 0,13333, w_I = w_{II} = \frac{1 - 0,13333}{2} = 0,43333$$

$$w_k = w_{III} = 0,13333, w_l = w_I = 0,43333, w_m = w_{II} = 0,43333$$

**Exemple 8 :**  $[\sigma_I = \sigma_m = 1, \sigma_{II} = \sigma_l = -5, \sigma_{III} = \sigma_k = -6, \sigma_u = -10, f_c = -30]$  MPa se trouvant à l'intérieur du quadrant 14-15-2-1, voir [Figure IV.1](#).

Dans ce cas,  $\sigma_I \geq 0, \sigma_u < \sigma_{II} < 0, \sigma_u < \sigma_{III} < 0$

$$\text{On a : } w_{III} = \frac{1}{3} - \frac{\sigma_{III}}{3\sigma_u}, w_{II} = \frac{1}{3} - \frac{\sigma_{II}}{3\sigma_u}, w_I = 1 - w_{II} - w_{III}$$

$$w_{III} = \frac{1}{3} - \frac{-6}{3(-10)} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15} = 0,13333, w_{II} = \frac{1}{3} - \frac{-5}{3(-10)} = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{6-3}{18} = \frac{1}{6} = 0,16666$$

$$w_I = 1 - 0,16666 - 0,13333 = 0,7$$

$$w_k = w_{III} = 0,13333, w_l = w_{II} = 0,16666, w_m = w_I = 0,7$$

**Exemple 9 :**  $[\sigma_I = \sigma_m = 1, \sigma_{II} = \sigma_k = -20, \sigma_{III} = \sigma_l = -25, \sigma_u = -10, f_c = -30]$  MPa se trouvant à l'intérieur du quadrant 15-16-5-2, voir [Figure IV.1](#).

Dans ce cas,  $\sigma_I \geq 0, f_c < \sigma_{II} < \sigma_u, f_c < \sigma_{III} < \sigma_u$

$$\text{On a : } w_I = 1, w_{II} = w_{III} = 0, \text{ donc } w_k = w_{II} = w_{III} = w_l = 0, w_m = w_I = 1$$

### D.3. Procédure implémentant les fonctions poids proposées sous Cast3M

```
DEBPROC D_RAG SIGPRIN*MCHAML Si_u*FLOTTANT Si_ft*FLOTTANT
Si_fc*FLOTTANT GvRag*FLOTTANT NomCEpsi*LISTMOTS;

*Variables d'entrée
* Champ des contraintes principales : SIGPRIN
* Contrainte 'limite d'anisotropie' : Si_u
* Contrainte limite de traction : Si_ft
* Contrainte limite de compression : Si_fc
* Gonflement volumique isotrope de RAG : GvRAG
* Listes des noms des composants : NomCEpsi

* Extraction de chacune des composantes de SIGPRIN

S_I   = EXCO SIGPRIN 'SI11' 'SCAL';
S_II  = EXCO SIGPRIN 'SI22' 'SCAL';
S_III = EXCO SIGPRIN 'SI33' 'SCAL';
*
CIX   = EXCO SIGPRIN 'COX1' 'SCAL';
CIY   = EXCO SIGPRIN 'COY1' 'SCAL';
CIZ   = EXCO SIGPRIN 'COZ1' 'SCAL';
*
CIIX  = EXCO SIGPRIN 'COX2' 'SCAL';
CIYI  = EXCO SIGPRIN 'COY2' 'SCAL';
CIIZ  = EXCO SIGPRIN 'COZ2' 'SCAL';
*
CIIIX = EXCO SIGPRIN 'COX3' 'SCAL';
CIIYI = EXCO SIGPRIN 'COY3' 'SCAL';
CIIIZ = EXCO SIGPRIN 'COZ3' 'SCAL';

* Cas où au moins une des contraintes dépasse la limite élastique
* en traction ou en compression (Cas 0):
* SI ((S_I.i >EG Si_ft) OU (S_III.i <EG Si_fc));
*** Dans le cas où toutes les contraintes doivent dépasser le seuil :
***SI ((S_III.i >EG Si_ft) OU (S_I.i <EG Si_fc));
* On choisi WI = WII = WIII = 1/3, au lieu de 0

MASQ0 = MASQ ((MASQ S_I 'EGSUPE' Si_ft)+(MASQ S_III 'EGINFE' Si_fc))
'SUPERIEUR' 0.D0; COMM '(S_I >EG Si_ft) OU (S_III <EG Si_fc)';
CHW1_0 = MASQ0 * (1.D0 / 3.D0);
CHW2_0 = MASQ0 * (1.D0 / 3.D0);
CHW3_0 = MASQ0 * (1.D0 / 3.D0);

*** Le premier chiffre correspond à la situation de S_I *****
*** Le deuxième chiffre correspond à la situation de S_II *****
*** Le troisième chiffre correspond à la situation de S_III ***
*
* 1 - cas correspondants à : >EG 0
MASQ1 = MASQ S_I 'EGSUPE' 0.D0; COMM 'S_I >EG 0';
MASQ01 = MASQ S_II 'EGSUPE' 0.D0; COMM 'S_II >EG 0';
MASQ001 = MASQ S_III 'EGSUPE' 0.D0; COMM 'S_III >EG 0';
*
* 2 - cas correspondants à : < 0 ET > Si_u
MASQ2 = (MASQ S_I 'INFE' 0.D0)*(MASQ S_I 'SUPE' Si_u);
MASQ02 = (MASQ S_II 'INFE' 0.D0)*(MASQ S_II 'SUPE' Si_u);
MASQ002 = (MASQ S_III 'INFE' 0.D0)*(MASQ S_III 'SUPE' Si_u);
*
* 3 - cas correspondants à : <EG Si_u ET > Si_fc
MASQ3 = (MASQ S_I 'EGINFE' Si_u)*(MASQ S_I 'SUPE' Si_fc);
MASQ03 = (MASQ S_II 'EGINFE' Si_u)*(MASQ S_II 'SUPE' Si_fc);
MASQ003 = (MASQ S_III 'EGINFE' Si_u)*(MASQ S_III 'SUPE' Si_fc);
* T1 - Champ par élément dont toutes les valeurs sont = 1
MASQT1 = (MASQ (0.D0*MASQ1) 'EGALE' 0.D0);

* 11* : SI (S_I >EG 0);
*      SI (S_II >EG 0);
MASQ11 = MASQ1 * MASQ01;
* 111 : .....SI (S_III >EG 0);
MASQ111 = MASQ11 * MASQ001;
CHW1_111 = MASQ111 * (1.D0 / 3.D0);
CHW2_111 = MASQ111 * (1.D0 / 3.D0);
CHW3_111 = MASQ111 * (1.D0 / 3.D0);
```

## Annexe D - Eléments complémentaires pour la prise en compte de l'anisotropie de la RAG sous chargement

```

* 112 : .....SI ((S_III < 0) ET (S_III > Si_u));
MASQ112 = MASQ11 * MASQ002;
Wtp = ((1.D0/3.D0) * MASQ112) + ((1.D0/(6.D0*Si_u))*S_III);
Wtp3 = ((1.D0/3.D0) * MASQ112) - ((1.D0/(3.D0*Si_u))*S_III);
CHW1_112 = MASQ112 * Wtp;
CHW2_112 = MASQ112 * Wtp;
CHW3_112 = MASQ112 * Wtp3;
* 113 : .....SI ((S_III < EG Si_u) ET (S_III > Si_fc));
MASQ113 = MASQ11 * MASQ003;
CHW1_113 = MASQ113 * (1.D0 / 2.D0);
CHW2_113 = MASQ113 * (1.D0 / 2.D0);
CHW3_113 = MASQ113 * 0.D0;
*
* 12* : SI (S_I > EG 0);
*      SI ((S_II < 0) ET (S_II > Si_u));
MASQ12 = MASQ1 * MASQ02;
* 122 : .....SI ((S_III < 0) ET (S_III > Si_u));
MASQ122 = MASQ12 * MASQ002;
Wtp1 = ((1.D0/3.D0) * MASQ122) + ((1.D0/(3.D0*Si_u))*(S_II+S_III));
Wtp2 = ((1.D0/3.D0) * MASQ122) - ((1.D0/(3.D0*Si_u))*S_II);
Wtp3 = ((1.D0/3.D0) * MASQ122) - ((1.D0/(3.D0*Si_u))*S_III);
CHW1_122 = MASQ122 * Wtp1;
CHW2_122 = MASQ122 * Wtp2;
CHW3_122 = MASQ122 * Wtp3;
* 123 : .....SI ((S_III < EG Si_u) ET (S_III > Si_fc));
MASQ123 = MASQ12 * MASQ003;
Wtp1 = ((1.D0/2.D0) * MASQ123) - ((1.D0/(2.D0*Si_u))*S_II);
Wtp2 = ((1.D0/2.D0) * MASQ123) + ((1.D0/(2.D0*Si_u))*S_II);
CHW1_123 = MASQ123 * Wtp1;
CHW2_123 = MASQ123 * Wtp2;
CHW3_123 = MASQ123 * 0.D0;
*
* 133 : ...SI ((S_II < EG Si_u) ET (S_II > Si_fc));
*      SI ((S_III < EG Si_u) ET (S_III > Si_fc));
MASQ133 = (MASQ1 * MASQ03) * MASQ003;
CHW1_133 = MASQ133 * 1.D0;
CHW2_133 = MASQ133 * 0.D0;
CHW3_133 = MASQ133 * 0.D0;
*
* 22 : SI ((S_I) < 0 ET (S_I > Si_u));
*      SI ((S_II < 0) ET (S_II > Si_u));
MASQ22 = MASQ2 * MASQ02;
* 222 : .....SI ((S_III < 0) ET (S_III > Si_u));
MASQ222 = MASQ22 * MASQ002;
DWtp = (S_I+S_II+S_III-(3.D0*(Si_u*MASQT1)));
Wtp1 = (S_I-(Si_u*MASQ222))/DWtp;
Wtp2 = (S_II-(Si_u*MASQ222))/DWtp;
Wtp3 = (S_III-(Si_u*MASQ222))/DWtp;
CHW1_222 = MASQ222 * Wtp1;
CHW2_222 = MASQ222 * Wtp2;
CHW3_222 = MASQ222 * Wtp3;
* 223 : .....SI ((S_III < EG Si_u) ET (S_III > Si_fc));
MASQ223 = MASQ22 * MASQ003;
DWtp = (S_I+S_II-(2.D0*(Si_u*MASQT1)));
Wtp1 = (S_I-(Si_u*MASQ223))/DWtp;
Wtp2 = (S_II-(Si_u*MASQ223))/DWtp;
CHW1_223 = MASQ223 * Wtp1;
CHW2_223 = MASQ223 * Wtp2;
CHW3_223 = MASQ223 * 0.D0;
* 233 : ...SI ((S_II < EG Si_u) ET (S_II > Si_fc));
*      SI ((S_III < EG Si_u) ET (S_III > Si_fc));
MASQ233 = (MASQ2 * MASQ03) * MASQ003;
DWtp = (S_I+S_II+S_III-(3.D0*(Si_fc*MASQT1)));
Wtp1 = (S_I-(Si_fc*MASQ233))/DWtp;
Wtp2 = (S_II-(Si_fc*MASQ233))/DWtp;
Wtp3 = (S_III-(Si_fc*MASQ233))/DWtp;
CHW1_233 = MASQ233 * Wtp1;
CHW2_233 = MASQ233 * Wtp2;
CHW3_233 = MASQ233 * Wtp3;
*
* 333 : ...SI ((S_I < EG Si_u) ET (S_I > Si_fc));
*      SI ((S_II < EG Si_u) ET (S_II > Si_fc));
*      SI ((S_III < EG Si_u) ET (S_III > Si_fc));
MASQ333 = (MASQ3 * MASQ03) * MASQ003;
DWtp = (S_I+S_II+S_III-(3.D0*(Si_fc*MASQT1)));

```



```

Wtp1 = (S_I-(Si_fc*MASQ333))/DWtp;
Wtp2 = (S_II-(Si_fc*MASQ333))/DWtp;
Wtp3 = (S_III-(Si_fc*MASQ333))/DWtp;
CHW1_333 = MASQ333 * Wtp1;
CHW2_333 = MASQ333 * Wtp2;
CHW3_333 = MASQ333 * Wtp3;

*** Pour éviter les arrêts pour poids non calculés,
* Si S_I.i >= S_II.i >= S_III.i, Faux = Bug Cast3M !!
***
* Pas nécessaire à priori mais à voir, et mettre au début au besoin
*** Calcul des champs de chaque poids WI, WII et WIII ***
WI = CHW1_0 + CHW1_111 + CHW1_112 + CHW1_113 + CHW1_122 +
    CHW1_123 + CHW1_133 + CHW1_222 + CHW1_223 + CHW1_233 + CHW1_333;
*
WII = CHW2_0 + CHW2_111 + CHW2_112 + CHW2_113 + CHW2_122 +
    CHW2_123 + CHW2_133 + CHW2_222 + CHW2_223 + CHW2_233 + CHW2_333;
*
WIII = CHW3_0 + CHW3_111 + CHW3_112 + CHW3_113 + CHW3_122 +
    CHW3_123 + CHW3_133 + CHW3_222 + CHW3_223 + CHW3_233 + CHW3_333;

** Construction du champs de dilatation due à la RAG
* Si problème AXISymétrique
    SI (DIME(NomCEpsi)EGA 4);

* Changement de repère
Wxx = (CIX*CIX*WI)+(CIIX*CIIX*WII)+(CIIIX*CIIIX*WIII);
Wyy = (CIY*CIY*WI)+(CIIY*CIIY*WII)+(CIIIIY*CIIIIY*WIII);
Wzz = (CIZ*CIZ*WI)+(CIIZ*CIIZ*WII)+(CIIIZ*CIIIZ*WIII);
Wxz = (CIX*CIZ*WI)+(CIIX*CIIZ*WII)+(CIIIX*CIIIZ*WIII);

* On renomme les composantes comme il faut
* 'EPRR' 'EPZZ' 'EPTT' 'GARZ'

c_1 = CHAN 'COMP' (EXTR NomCEpsi 1)
    (CHAN 'TYPE' (Wxx*GvRag) 'DEFORMATIONS');
c_2 = CHAN 'COMP' (EXTR NomCEpsi 2)
    (CHAN 'TYPE' (Wzz*GvRag) 'DEFORMATIONS');
c_3 = CHAN 'COMP' (EXTR NomCEpsi 3)
    (CHAN 'TYPE' (Wyy*GvRag) 'DEFORMATIONS');
c_4 = CHAN 'COMP' (EXTR NomCEpsi 4)
    (CHAN 'TYPE' (Wxz*GvRag) 'DEFORMATIONS');

* Assemblage du MCHAML de sortie
C_0 = c_1 ET c_2 ET c_3 ET c_4;
    FINSI;

* Si problème TRIDimensionnel
    SI (DIME(NomCEpsi)EGA 6);
* Changement de repère
Wxx = (CIX*CIX*WI)+(CIIX*CIIX*WII)+(CIIIX*CIIIX*WIII);
Wyy = (CIY*CIY*WI)+(CIIY*CIIY*WII)+(CIIIIY*CIIIIY*WIII);
Wzz = (CIZ*CIZ*WI)+(CIIZ*CIIZ*WII)+(CIIIZ*CIIIZ*WIII);
Wxy = (CIX*CIY*WI)+(CIIX*CIIY*WII)+(CIIIX*CIIIIY*WIII);
Wxz = (CIX*CIZ*WI)+(CIIX*CIIZ*WII)+(CIIIX*CIIIZ*WIII);
Wyz = (CIY*CIZ*WI)+(CIIY*CIIZ*WII)+(CIIIIY*CIIIZ*WIII);

* On renomme les composantes comme il faut
* 'EPXX' 'EPYY' 'EPZZ' 'GAXY' 'GAXZ' 'GAYZ'
c_1 = CHAN 'COMP' (EXTR NomCEpsi 1)
    (CHAN 'TYPE' (Wxx*GvRag) 'DEFORMATIONS');
c_2 = CHAN 'COMP' (EXTR NomCEpsi 2)
    (CHAN 'TYPE' (Wyy*GvRag) 'DEFORMATIONS');
c_3 = CHAN 'COMP' (EXTR NomCEpsi 3)
    (CHAN 'TYPE' (Wzz*GvRag) 'DEFORMATIONS');
c_4 = CHAN 'COMP' (EXTR NomCEpsi 4)
    (CHAN 'TYPE' (Wxy*GvRag) 'DEFORMATIONS');
c_5 = CHAN 'COMP' (EXTR NomCEpsi 5)
    (CHAN 'TYPE' (Wxz*GvRag) 'DEFORMATIONS');
c_6 = CHAN 'COMP' (EXTR NomCEpsi 6)
    (CHAN 'TYPE' (Wyz*GvRag) 'DEFORMATIONS');
* Assemblage du MCHAML de sortie
    C_0 = c_1 ET c_2 ET c_3 ET c_4 ET c_5 ET c_6;
    FINSI;
FINPROC WI WII WIII C_0;

```

#### D.4. Définition du contact cylindrique unilatéral sous Cast3M

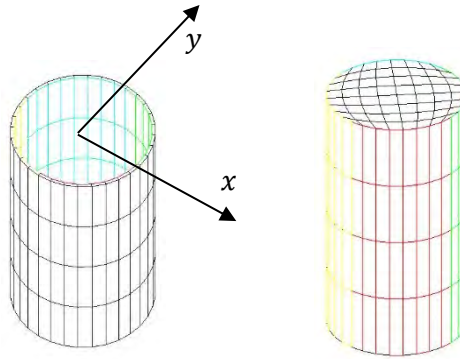


Figure D.1 : Quarts de cylindre utilisés dans la définition du contact unilatéral

Le quart de cylindre en vert représente les points avec :  $x \geq 0$  et  $y \geq 0$ . On a les relations suivantes :

\*  $H=Haut$ ,  $B=Bas$ ,  $G=Gauche$ ,  $D=Droite$   
 $CalXHD = \text{RELA MINI } UX \ B\_eaLhd - UX \ B\_epLhd;$   
 $CalYHD = \text{RELA MINI } UY \ B\_eaLhd - UY \ B\_epLhd;$

Le quart de cylindre cyan représente les points avec :  $x \leq 0$  et  $y \geq 0$ . On a les relations suivantes :

$CalXHG = \text{RELA MINI } UX \ B\_epLhg - UX \ B\_eaLhg;$   
 $CalYHG = \text{RELA MINI } UY \ B\_eaLhg - UY \ B\_epLhg;$

Le quart de cylindre jaune représente les points avec :  $x \leq 0$  et  $y \leq 0$ . On a les relations suivantes :

$CalXBG = \text{RELA MINI } UX \ B\_epLbg - UX \ B\_eaLbg;$   
 $CalYBG = \text{RELA MINI } UY \ B\_epLbg - UY \ B\_eaLbg;$

Le quart de cylindre rouge représente les points avec :  $x \geq 0$  et  $y \leq 0$ . On a les relations suivantes :

$CalXBD = \text{RELA MINI } UX \ B\_eaLbd - UX \ B\_epLbd;$   
 $CalYBD = \text{RELA MINI } UY \ B\_epLbd - UY \ B\_eaLbd;$

## Annexe E

### Informations complémentaires pour l'analyse de fiabilité de l'évacuateur de crues de Song Loulou



E. 1.	DONNEES COMPLEMENTAIRES SUR L'AMENAGEMENT HYDROELECTRIQUE DE SONG LOULOU	236
E. 2.	ARBRES DE DEFAILLANCE D'UNE VANNE D'EVACUATEUR DE CRUE	240
E. 3.	DONNEES D'AUSCULTATION DES PILES DE L'EVACUATEUR DE CRUES DE SONG LOULOU	245
E. 4.	COEFFICIENTS DU MODEL DE SUBSTITUTION DU DEPLACEMENT AU POINT D'AUSCULTATION	246
E. 5.	COEFFICIENTS DU MODEL DE SUBSTITUTION DU DEPLACEMENT MAXIMAL DE LA CONSOLE	253
E. 6.	COEFFICIENTS DU MODEL DE SUBSTITUTION DU DEPLACEMENT MAXIMAL EN X DE LA RAINURE	258

## E.1. Données complémentaires sur l'aménagement hydroélectrique de Song Loulou

Tableau E. 1 : Synthèse des données des ouvrages de Song Loulou


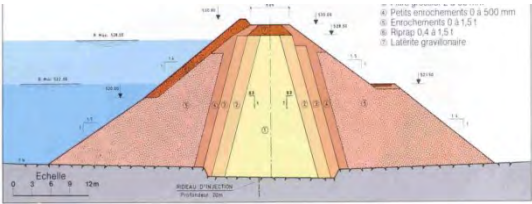
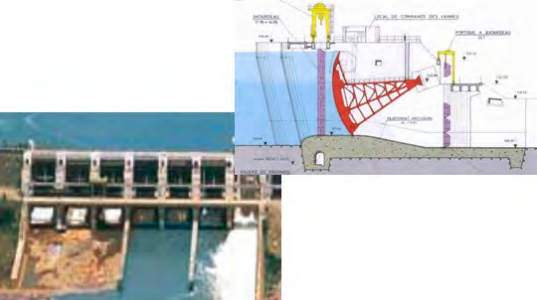
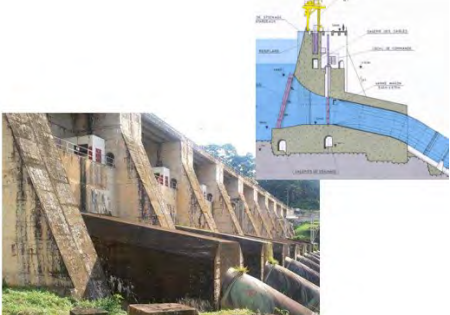

<b>Données Fondation :</b> Gneiss dur, $R_{Cintact} = 55\text{MPa}$ , $E_{intact} = 30\text{GPa}$ , $GSI = 65$ , $D = 0.7$ , $E_{apparent} = 8\text{GPa}$ , $\nu = 0.2$	
<b>Barrage en béton à seuil déversant</b> 	Barrage poids en béton à seuil déversant Longueur : 200 m, Hauteur : 8 m Cote du seuil : 528 m (niveau normal d'exploitation) Volume de béton : 12 500 m <sup>3</sup> Poids Volumique : 24kN/m <sup>3</sup> $R_{Cmin} = 15\text{MPa}$ , $R_{Cmax} = 50\text{MPa}$ , $R_{tmin} = 2.5\text{MPa}$ , $R_{tmax} = 10\text{MPa}$ , $R_{\tau min} = 2\text{MPa}$ , $R_{\tau max} = 15\text{MPa}$ $E_{intact} = 20\text{GPa}$ , $E_{actuel} = 12\text{GPa}$ , $E_{moyen} = 16\text{GPa}$ , $\nu = 0.19$
<b>Barrage principal en enrochements à noyau en terre</b> 	Barrage zoné en enrochements à noyau central en argile latéritique séparé des recharges par des filtres en sable et gravillons Longueur : 300 m, Largeur en crête : 9 m Hauteur : 27 m, Cote de crête : 530 m
<b>Evacuateur de crue</b> 	Sept passes obturées par des vannes secteurs à clapets, de dimensions $l = 14\text{ m} \times h = 17,25\text{ m}$ Epaisseur des piles entre les passes : 4,5 m Longueur : 135 m, Hauteur : 20 m Cote seuil passe : 511m, Cote de crête : 530 m Capacité d'évacuation : 10 000 m <sup>3</sup> /s à la cote 528,5 m avec une vanne bloquée et l'usine arrêtée Volume de béton : 73 700 m <sup>3</sup> Poids Volumique : 24kN/m <sup>3</sup> $R_{Cmin} = 15\text{ MPa}$ , $R_{Cmax} = 50\text{ MPa}$ , $R_{tmin} = 2.5\text{ MPa}$ , $R_{tmax} = 10\text{ MPa}$ , $R_{\tau min} = 2\text{ MPa}$ , $R_{\tau max} = 15\text{ MPa}$
<b>Barrage de prise d'eau</b> 	Structure en béton à contreforts Longueur : 225 m, Hauteur : 35 m Cote de crête : 530 m Huit pertuis de 13,50 m de largeur, conduites forcées de 6,40 m de diamètre, 51 m de longueur et inclinées à 32° par rapport à l'horizontale Volume de béton : 85 800 m <sup>3</sup> , Poids Volumique : 24kN/m <sup>3</sup> $R_{Cmin} = 15\text{ MPa}$ , $R_{Cmax} = 50\text{ MPa}$ , $R_{tmin} = 2.5\text{ MPa}$ , $R_{tmax} = 10\text{ MPa}$ , $R_{\tau min} = 2\text{ MPa}$ , $R_{\tau max} = 15\text{ MPa}$
<b>Usine</b> 	Huit groupes Francis de 48 MW de puissance nominale, Entraxe des groupes : 18,50 m Débit de 130 m <sup>3</sup> /s pour une chute nette de 41,5 m Deux ponts roulants de 110 tonnes Canal de fuite creusé dans la roche, de largeur 23 m et de tirant d'eau 14 m pour une vitesse maximale d'écoulement de 3 m/s Volume du béton : 87 000 m <sup>3</sup> (43 500 m <sup>3</sup> pour 1ère P) Poids Volumique : 24kN/m <sup>3</sup> $R_{Cmin} = 15\text{ MPa}$ , $R_{Cmax} = 50\text{ MPa}$ , $R_{tmin} = 2.5\text{ MPa}$ , $R_{tmax} = 10\text{ MPa}$ , $R_{\tau min} = 2\text{ MPa}$ , $R_{\tau max} = 15\text{ MPa}$

Tableau E. 2 : Extrait de l'analyse de risque de Song Loulou [ISL 2011] (1/2)

Aléas identifiés	Classe de gravité (0-4)			Cause	Conséquences	Signes avant-coureurs	Paragraphe de référence dans le rapport	Classe de probabilité (1-5)	Classe de risque (0-9)
	Séc	Font	Coût						
C1 Rupture des tirants passifs d'ancrage des pivots ou déformation importante dans la pile	3	3	3	Gonflement du béton des piles	Perte d'une ou deux passes de l'évacuateur Nécessité de batardeage de deux passes	Augmentation de la vitesse de déformation de la pile Difficultés de manœuvre Développement de la fissuration	2.4.5; 6.9; 7.11.5	3	6.0
C2 Rupture des tirants actifs d'ancrage des consoles des pivots ou déformation importante des consoles ou écrasement du béton des consoles	3	3	3	Gonflement du béton des consoles	Perte d'une ou deux passes de l'évacuateur Nécessité de batardeage de deux passes	Fissuration des consoles d'appui des vannes Augmentation de l'épaisseur	2.4.5; 7.11.5	4	6.0
C3 Rupture d'une pile suite à la diminution de ses caractéristiques mécaniques	3	3	3	RAG	Perte de deux passes de l'évacuateur	Fissuration Augmentation des déformations	2.4.5; 7.11.5	3	5.0
C4 Rupture partielle par érosion d'un radier pendant une crue	1	1	2	Rupture du ferrailage vertical	Batardeage de la passe	Amorce d'érosion Diminution du nombre de passe disponible	5.1.2	4	6.0
C5 Instabilité du radier par augmentation des sous-pressions	2	2	3	Augmentation des sous-pressions Corrosion des ancrages	Perte d'une passe de l'évacuateur - nécessité de batardeage de la passe	Soulèvement ou fissuration du radier	10.3; 12.2	3	6.0
C6 Rupture du plot de jonction entre le barrage de prise et l'évacuateur	3	4	3	Augmentation de l'effort transmis par le barrage due au gonflement du béton	Ennoiment de l'usine - arrêt d'exploitation pour plusieurs mois	Fissuration du plot Déplacements excessifs	5.1.1; 7.11.4.9	3	6.0
C7 Submersion de l'évacuateur en crue sans rupture	3	3	3	Indisponibilité partielle de l'évacuateur de crue	Ennoiment de l'usine - Perte de la production hydroélectrique pour plusieurs mois Perte du contrôle commande des vannes avec risque de fermeture intempestive	Annnonce d'une crue exceptionnelle Mise hors service de plus d'une passe	2.1.1; 2.5.3; 5.2.9	4	6.0
C8 Submersion de l'évacuateur en crue entraînant la rupture	3	4	4	Indisponibilité partielle de l'évacuateur de crue	Perte de l'évacuateur et de l'usine - Perte de la production hydroélectrique pour plusieurs années Perte de la production hydroélectrique pour plusieurs années Perte du contrôle commande des vannes avec risque de fermeture intempestive	Annnonce d'une crue exceptionnelle Mise hors service de plus de 2 passes	2.1.1; 2.5.3; 5.2.9	3	6.0
C9 Rupture du bajoyer rive gauche sous la poussée du barrage de prise	1	1	1	Gonflement résiduel du béton	Perte d'une passe de l'évacuateur Ennoiment de l'usine	Blocage de la vanne n°1 Fissuration du bajoyer	7.11.4.10	3	6.0



Tableau E. 3 : Extrait de l'analyse de risque de Song Loulou [ISL 2011] (2/2)

D. Evacuateur - Equipements									
Aléas identifiés	Classe de gravité (0-4)		Causes	Conséquences	Signes avant-coureurs	Paragraphe de référence dans le rapport	Classe de gravité (1-9)	Classe de risque (0-9)	
	1	3				N°			
D1 Rupture d'une vanne (hors rupture d'une console d'appui)	1	3	2,0	Déformation du genre civil due à la RAR. Chac par un fléchissement de la structure de la vanne	Mise hors service de la passe pour réparation de la vanne	7.5.2	4	0	0
D2 Blocage d'une vanne en position ouverte	1	3	2	3,0	Mise hors service de la passe pour réparation de la vanne	7.5.2; 11.4.10	3	0	0
D3 Blocage d'une vanne en position fermée	3	1	2	3,0	Mise hors service de la passe pour réparation de la vanne	7.5.2; 11.4.10	3	0	0
D4 Défaillance du contrôle commande sur une vanne	1	1	1	1,0	Passe hors service pendant quelques jours		3	0	0
D5 Défaillance généralisée du contrôle commande des vannes et/ou organes de manœuvre	4	3	2	4,0	Risque de submersion et de rupture des ouvrages		2	0	0
D6 Non fonctionnalité des portiques	2	1	2	2,0	Impossibilité de batardeur une passe de l'évacuateur pour intervenir sur une vanne	5.2	4	0	0
	Classe de gravité (0-4)		Causes	Conséquences	Signes avant-coureurs	Paragraphe de référence dans le rapport	Classe de gravité (1-9)	Classe de risque (0-9)	
						N°			
E. Barrage principal en envasements									
E1 Submersion du barrage lors d'une crue	2	3	4	4,0	Rupture du barrage - perte de la production pendant plusieurs mois	2.1.1; 2.5.3; 5.2; 9	2	0	0
E2 Rupture du barrage en crue par submersion du noyau d'argile	2	3	4	4,0	Rupture du barrage - perte de la production pendant plusieurs mois	0.1.4; 2.5.3; 5.2; 9; 12.3.3	3	0	0
E3 Vagues déferlant sur la crête (revanche insuffisante)	1	1	1	1,0	Erosion de la crête et du talus aval	2.1.1; 2.5.3; 5.2; 9; 12.3.3	2	0	0
E4 Augmentation brutale des fuites et des sous pressions dans le noyau (érosion interne, glissement de talus)	3	3	3	3,0	Rupture du barrage - perte de la production pendant plusieurs mois	12.3	2	0	0
E5 Augmentation progressive des fuites et des sous pressions dans le noyau	3	3	3	3,0	Début d'érosion interne, début de glissement de talus. Abaissement du plan d'eau et perte de la production pendant plusieurs mois	12.3	3	0	0

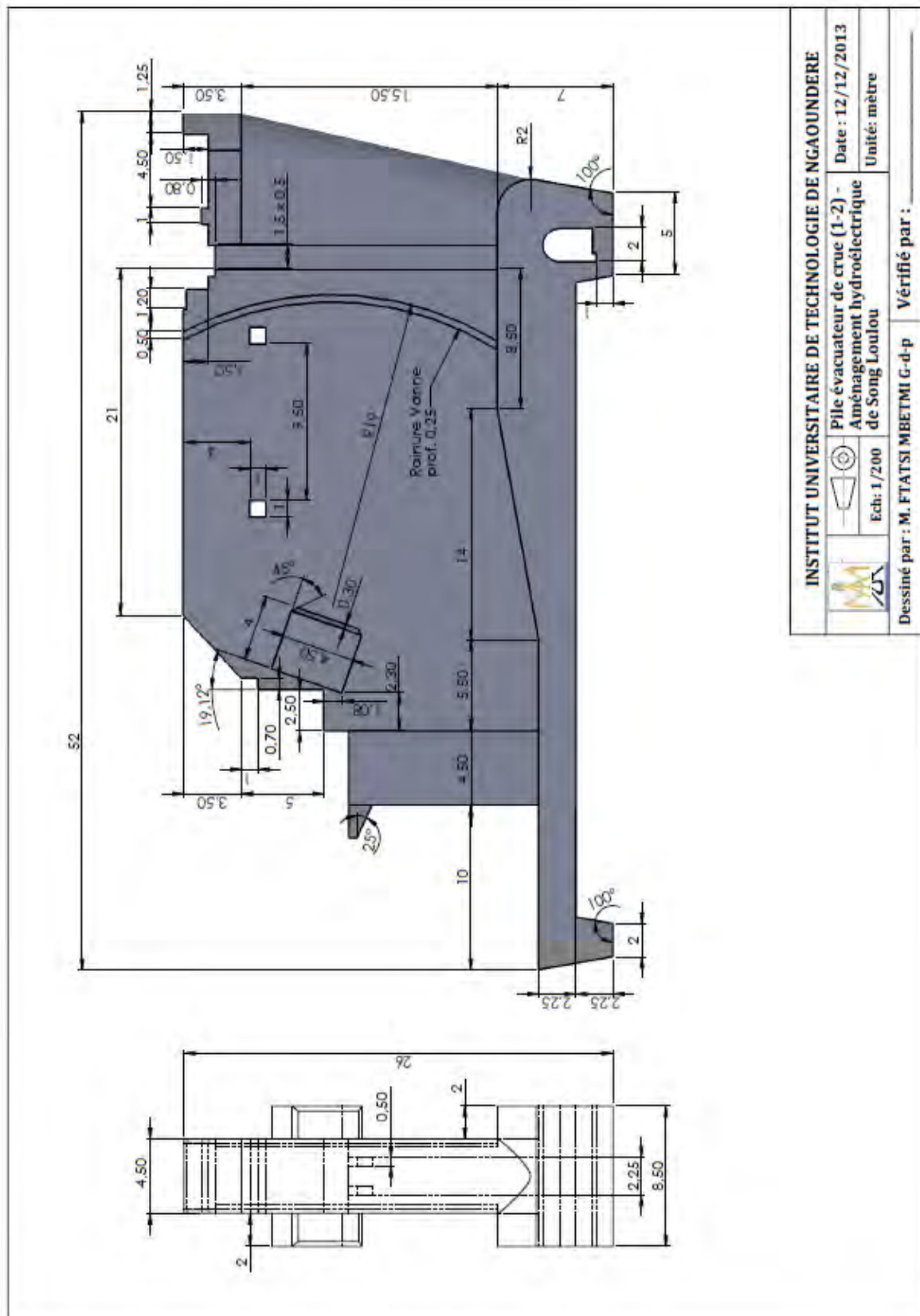


Figure E. 1 : Dessin de définition d'une pile d'évacuateur de crues de Song Loulou



## E. 2. Arbres de défaillance d'une vanne d'évacuateur de crue

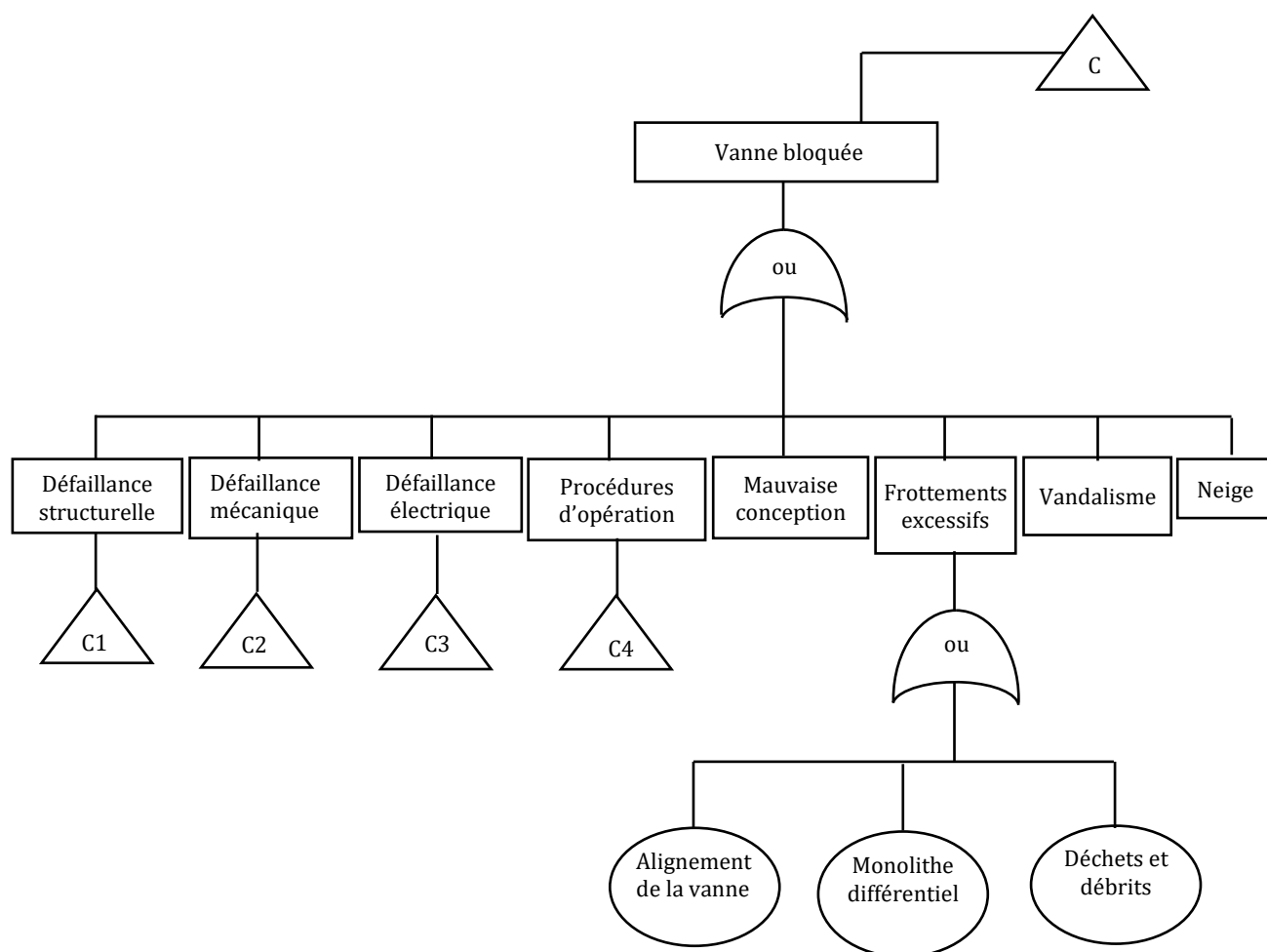


Figure E. 2: Arbre de défaillance pour « Défaillance de la vanne » adapté de [Patev *et al.* 2005 , Kalantarnia 2013]

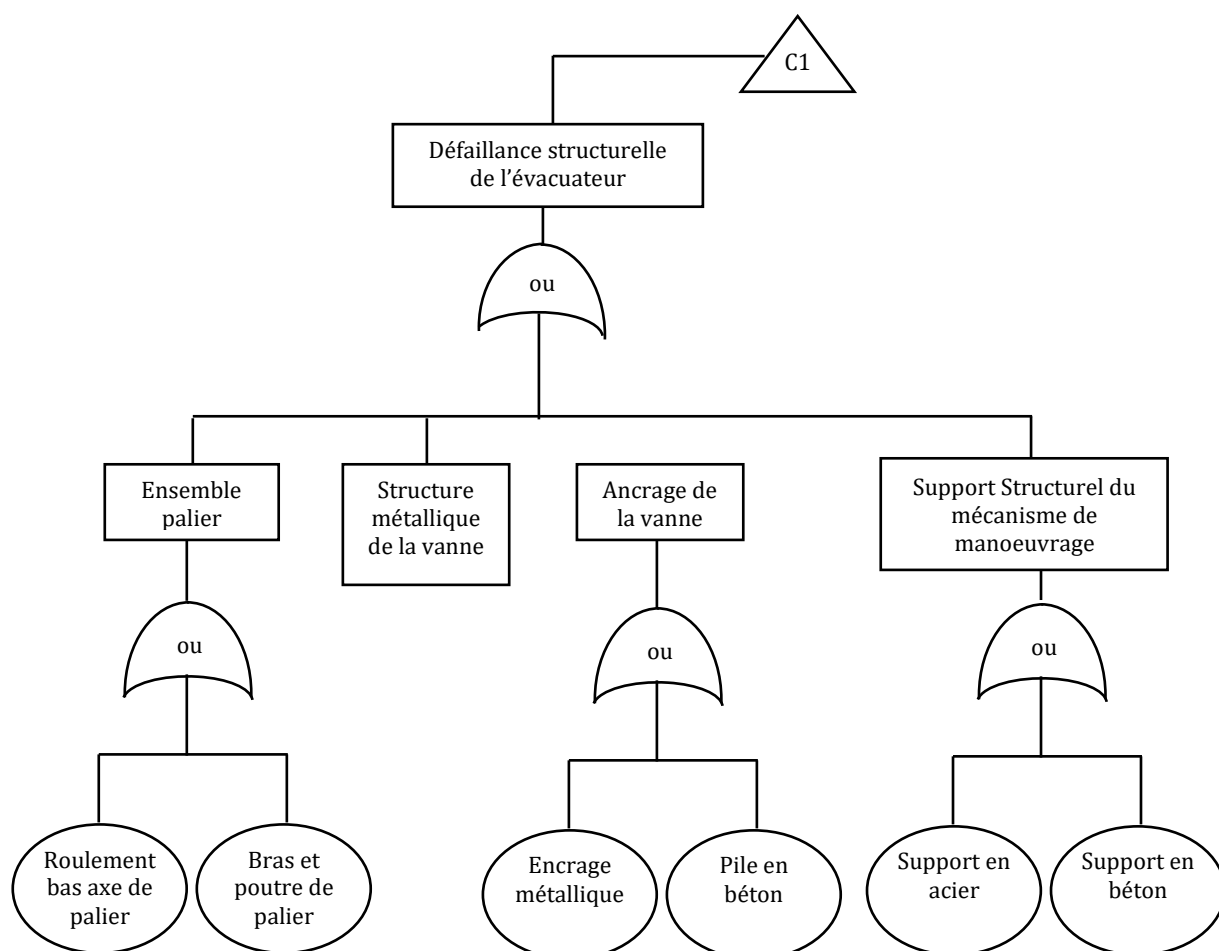


Figure E. 3 : Arbre de défaillance pour « Panne structurelle de la vanne » adapté de [Patev *et al.* 2005 , Kalantarnia 2013]

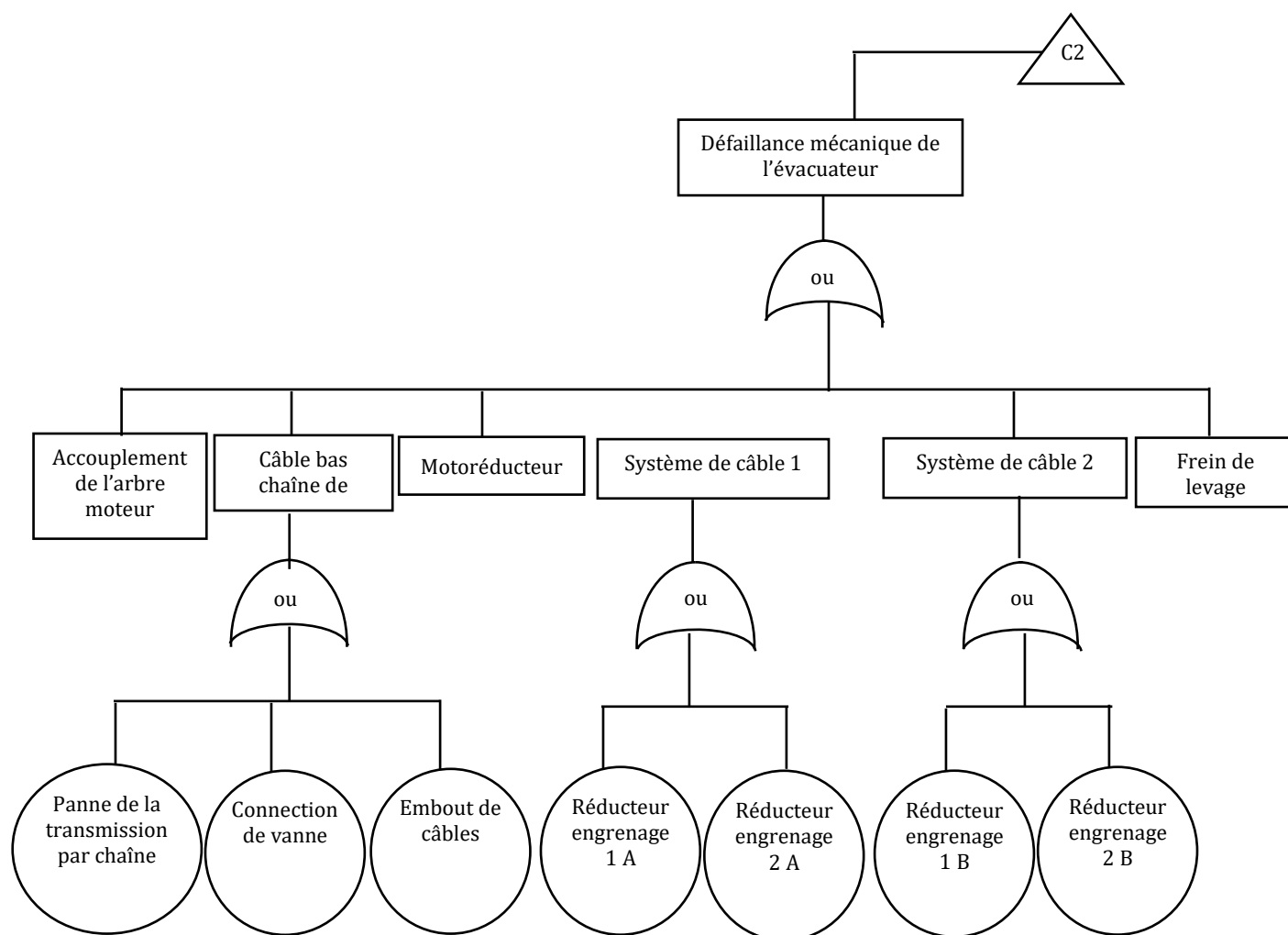


Figure E. 4 : Arbre de défaillance pour « Panne mécanique de la vanne » adapté de [Patev *et al.* 2005 , Kalantarnia 2013]

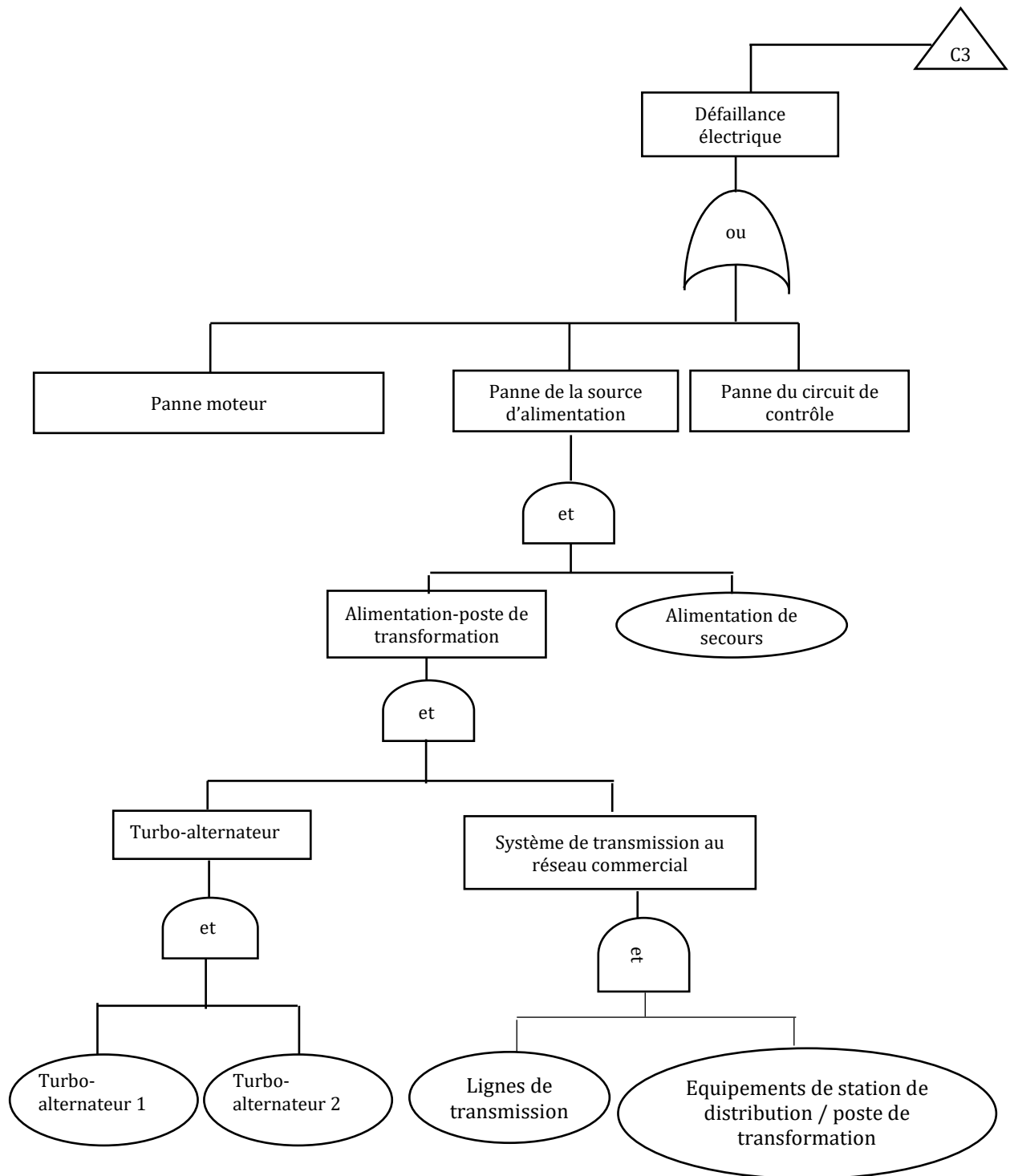


Figure E. 5: Arbre de défaillance pour « Panne électrique de la vanne » adapté de [Patev *et al.* 2005 , Kalantarnia 2013]

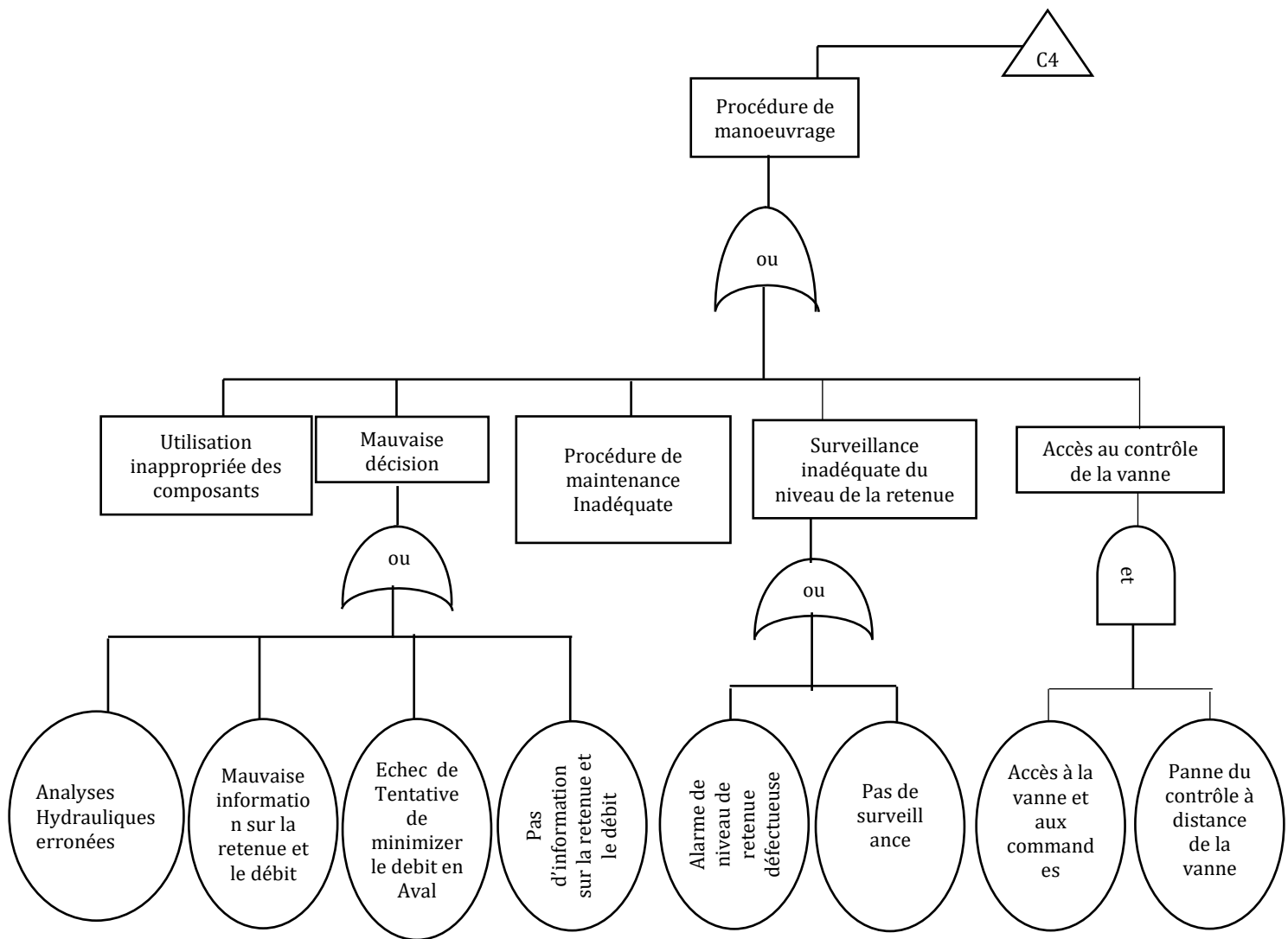


Figure E. 6 : Arbre de défaillance pour « Panne d'exploitation de la vanne » adapté de [Patev *et al.* 2005 , Kalantarnia 2013]

### E.3. Données d'auscultation des piles de l'évacuateur de crues de Song Loulou

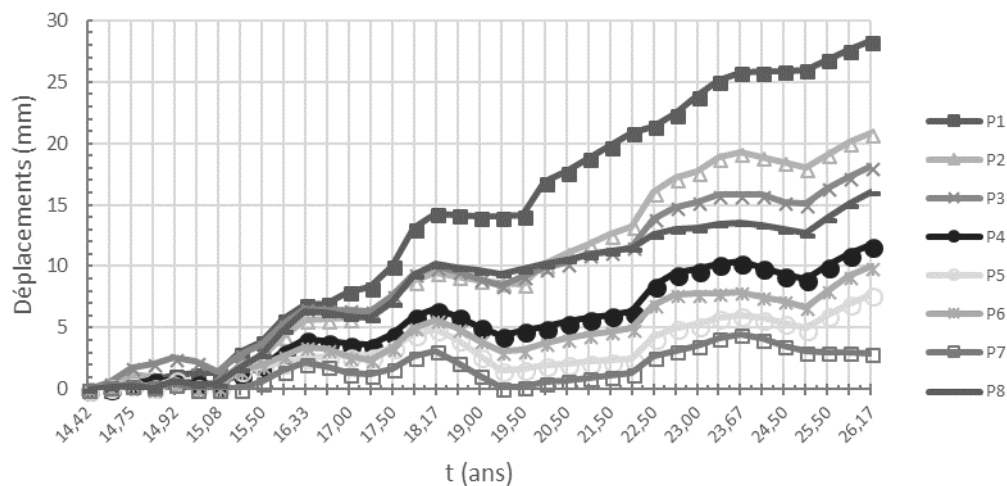


Figure E. 7 : Mésures de déplacements rive gauche – rive droite (-X)

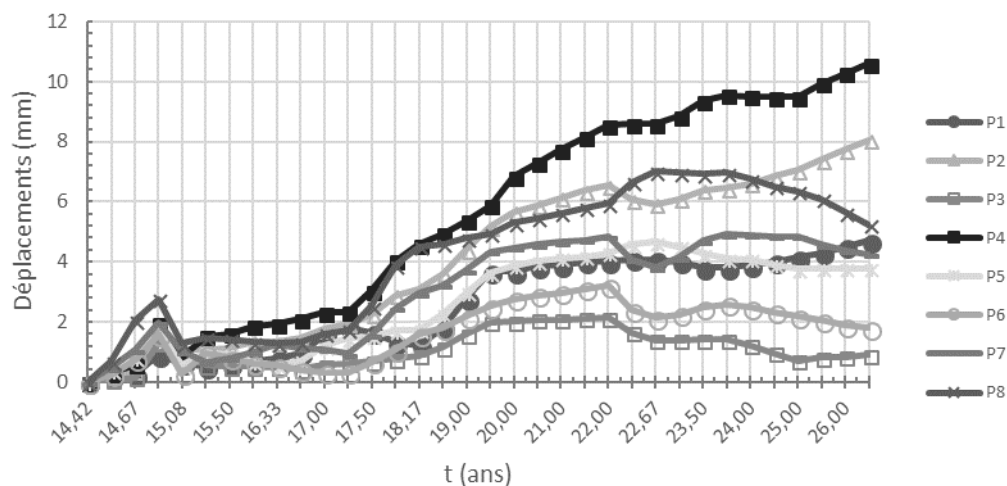


Figure E. 8 : Mésures de déplacements amont-aval (-Y)

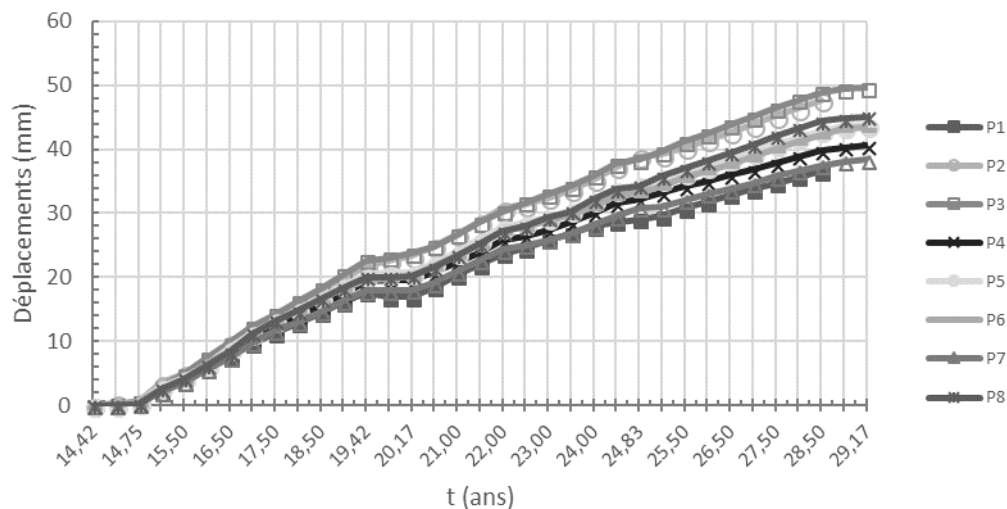


Figure E. 9 : Mésures de déplacements altimétriques (Z)

#### E.4. Coefficients du model de substitution du déplacement au point d'auscultation

Tableau E. 4 : Coefficients du modèle de substitution du déplacement au point d'auscultation (1/7)

$i$	$a_i^{\ U\ _{Max}}$	$\Psi_i^{Legendre \ U\ _{Max}}$	$i$	$a_i^{\ U\ _{Max}}$	$\Psi_i^{Legendre \ U\ _{Max}}$
0	2,8484005593E-02	1	38	-4,2415213028E-05	(1.73205 $\xi_1$ )(1.73205 $\xi_9$ )
1	2,0169338861E-04	1.73205 $\xi_0$	39	-1,1538736491E-04	(1.73205 $\xi_1$ )(1.73205 $\xi_{13}$ )
2	-2,7642554059E-03	1.73205 $\xi_1$	40	-5,2582918261E-04	(1.73205 $\xi_2$ )(1.73205 $\xi_3$ )
3	-2,7259474626E-03	1.73205 $\xi_2$	41	-4,2918556548E-04	(1.73205 $\xi_2$ )(1.73205 $\xi_4$ )
4	1,0903500524E-02	1.73205 $\xi_3$	42	-9,1917721726E-04	(1.73205 $\xi_2$ )(1.73205 $\xi_5$ )
5	-4,8324756291E-03	1.73205 $\xi_4$	43	-2,7032201412E-04	(1.73205 $\xi_2$ )(1.73205 $\xi_6$ )
6	-6,1330392738E-03	1.73205 $\xi_5$	44	2,1890583096E-04	(1.73205 $\xi_2$ )(1.73205 $\xi_7$ )
7	5,9229904618E-03	1.73205 $\xi_6$	45	-4,3386725204E-05	(1.73205 $\xi_2$ )(1.73205 $\xi_9$ )
8	-5,3124896635E-03	1.73205 $\xi_7$	46	-1,1920370117E-04	(1.73205 $\xi_2$ )(1.73205 $\xi_{13}$ )
9	5,5868570530E-04	1.73205 $\xi_8$	47	-1,0074782455E-03	(1.73205 $\xi_3$ )(1.73205 $\xi_4$ )
10	3,7619617382E-04	1.73205 $\xi_9$	48	-1,2973183837E-03	(1.73205 $\xi_3$ )(1.73205 $\xi_5$ )
11	3,7599821422E-04	1.73205 $\xi_{12}$	49	1,9764151795E-03	(1.73205 $\xi_3$ )(1.73205 $\xi_6$ )
12	1,2041268169E-03	1.73205 $\xi_{13}$	50	-1,7310651445E-03	(1.73205 $\xi_3$ )(1.73205 $\xi_7$ )
13	-7,1818974508E-05	-1.11803 + 3.3541 $\xi_0^2$	51	9,5514221530E-05	(1.73205 $\xi_3$ )(1.73205 $\xi_9$ )
14	-1,2507507010E-04	-1.11803 + 3.3541 $\xi_1^2$	52	1,5488464575E-04	(1.73205 $\xi_3$ )(1.73205 $\xi_{12}$ )
15	1,0855574216E-04	-1.11803 + 3.3541 $\xi_2^2$	53	4,7150996655E-04	(1.73205 $\xi_3$ )(1.73205 $\xi_{13}$ )
16	4,5002652874E-04	-1.11803 + 3.3541 $\xi_3^2$	54	-8,4211334741E-04	(1.73205 $\xi_4$ )(1.73205 $\xi_5$ )
17	4,6227063164E-04	-1.11803 + 3.3541 $\xi_4^2$	55	-5,0001603001E-04	(1.73205 $\xi_4$ )(1.73205 $\xi_6$ )
18	9,4284125279E-04	-1.11803 + 3.3541 $\xi_5^2$	56	4,5057896199E-04	(1.73205 $\xi_4$ )(1.73205 $\xi_7$ )
19	1,0251427924E-04	-1.11803 + 3.3541 $\xi_6^2$	57	2,0551505739E-04	(1.73205 $\xi_4$ )(1.73205 $\xi_8$ )
20	6,6897748457E-04	-1.11803 + 3.3541 $\xi_7^2$	58	-5,8685608946E-05	(1.73205 $\xi_4$ )(1.73205 $\xi_{12}$ )
21	1,8676277569E-04	-1.11803 + 3.3541 $\xi_8^2$	59	-1,9764779153E-04	(1.73205 $\xi_4$ )(1.73205 $\xi_{13}$ )
22	-6,8135539977E-05	-3.96863 $\xi_3$ + 6.61438 $\xi_3^3$	60	-6,4227000939E-04	(1.73205 $\xi_5$ )(1.73205 $\xi_6$ )
23	-6,4544439509E-05	-3.96863 $\xi_7$ + 6.61438 $\xi_7^3$	61	5,3371418033E-04	(1.73205 $\xi_5$ )(1.73205 $\xi_7$ )
24	1,0615964599E-04	-3.96863 $\xi_8$ + 6.61438 $\xi_8^3$	62	3,4836256605E-04	(1.73205 $\xi_5$ )(1.73205 $\xi_8$ )
25	-9,4415712576E-05	(1.73205 $\xi_9$ )(1.73205 $\xi_2$ )	63	-5,2149047392E-05	(1.73205 $\xi_5$ )(1.73205 $\xi_9$ )
26	1,1356413158E-04	(1.73205 $\xi_9$ )(1.73205 $\xi_3$ )	64	-8,5104117815E-05	(1.73205 $\xi_5$ )(1.73205 $\xi_{12}$ )
27	-7,9381914175E-05	(1.73205 $\xi_9$ )(1.73205 $\xi_4$ )	65	-2,5751255618E-04	(1.73205 $\xi_5$ )(1.73205 $\xi_{13}$ )
28	-2,6505399350E-04	(1.73205 $\xi_9$ )(1.73205 $\xi_5$ )	66	-9,0845573693E-04	(1.73205 $\xi_6$ )(1.73205 $\xi_7$ )
29	5,3555315660E-05	(1.73205 $\xi_9$ )(1.73205 $\xi_6$ )	67	4,4983882283E-05	(1.73205 $\xi_6$ )(1.73205 $\xi_9$ )
30	-3,7885106441E-05	(1.73205 $\xi_9$ )(1.73205 $\xi_8$ )	68	9,2367796520E-05	(1.73205 $\xi_6$ )(1.73205 $\xi_{12}$ )
31	-1,9541009200E-04	(1.73205 $\xi_1$ )(1.73205 $\xi_2$ )	69	2,6273277489E-04	(1.73205 $\xi_6$ )(1.73205 $\xi_{13}$ )
32	-6,8295912405E-04	(1.73205 $\xi_1$ )(1.73205 $\xi_3$ )	70	-7,7814725966E-05	(1.73205 $\xi_7$ )(1.73205 $\xi_{12}$ )
33	-2,8977559772E-04	(1.73205 $\xi_1$ )(1.73205 $\xi_4$ )	71	-2,1602123381E-04	(1.73205 $\xi_7$ )(1.73205 $\xi_{13}$ )
34	-3,2617375628E-04	(1.73205 $\xi_1$ )(1.73205 $\xi_5$ )	72	1,9494371650E-05	(-1.11803 + 3.3541 $\xi_0^2$ )(1.73205 $\xi_5$ )
35	-3,2822398259E-04	(1.73205 $\xi_1$ )(1.73205 $\xi_6$ )	73	5,5554361537E-05	(-1.11803 + 3.3541 $\xi_1^2$ )(1.73205 $\xi_4$ )
36	2,9098891861E-04	(1.73205 $\xi_1$ )(1.73205 $\xi_7$ )	74	9,6182740666E-05	(-1.11803 + 3.3541 $\xi_1^2$ )(1.73205 $\xi_5$ )
37	1,6460354429E-04	(1.73205 $\xi_1$ )(1.73205 $\xi_8$ )	75	-6,0321391574E-05	(-1.11803 + 3.3541 $\xi_1^2$ )(1.73205 $\xi_6$ )



Tableau E. 5 : Coefficients du modèle de substitution du déplacement au point d'auscultation (2/7)

$i$	$a_i^{\ U\ _{Max}}$	$\Psi_i^{Legendre \ U\ _{Max}}$	$i$	$a_i^{\ U\ _{Max}}$	$\Psi_i^{Legendre \ U\ _{Max}}$
76	4,7035900907E-05	$(-1.11803 + 3.3541\xi_1^2)(1.73205\xi_7)$	113	7,3221453892E-05	$(1.73205\xi_1)(1.73205\xi_2)(1.73205\xi_5)$
77	2,4593128168E-05	$(1.73205\xi_0)(-1.11803 + 3.3541\xi_2^2)$	114	-6,0474455512E-05	$(1.73205\xi_1)(1.73205\xi_2)(1.73205\xi_6)$
78	7,0198245457E-05	$(-1.11803 + 3.3541\xi_2^2)(1.73205\xi_4)$	115	7,4379516289E-05	$(1.73205\xi_1)(1.73205\xi_2)(1.73205\xi_7)$
79	9,1703675329E-05	$(-1.11803 + 3.3541\xi_2^2)(1.73205\xi_5)$	116	-3,0840181127E-04	$(1.73205\xi_1)(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_4)$
80	7,3554586175E-05	$(1.73205\xi_1)(-1.11803 + 3.3541\xi_3^2)$	117	-4,2646329672E-04	$(1.73205\xi_1)(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_5)$
81	8,9108487841E-05	$(1.73205\xi_2)(-1.11803 + 3.3541\xi_3^2)$	118	3,9908986284E-04	$(1.73205\xi_1)(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_5)$
82	2,0062416244E-04	$(-1.11803 + 3.3541\xi_3^2)(1.73205\xi_4)$	119	-1,3913414816E-04	$(1.73205\xi_1)(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_6)$
83	2,8622075734E-04	$(-1.11803 + 3.3541\xi_3^2)(1.73205\xi_5)$	120	1,6966858350E-04	$(1.73205\xi_1)(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_7)$
84	2,0646849692E-04	$(1.73205\xi_1)(-1.11803 + 3.3541\xi_4^2)$	121	9,1422126720E-05	$(1.73205\xi_1)(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_8)$
85	1,5161266664E-04	$(1.73205\xi_2)(-1.11803 + 3.3541\xi_4^2)$	122	-2,0818760366E-04	$(1.73205\xi_1)(1.73205\xi_5)(1.73205\xi_6)$
86	-1,0509782154E-04	$(1.73205\xi_3)(-1.11803 + 3.3541\xi_4^2)$	123	2,1055224806E-04	$(1.73205\xi_1)(1.73205\xi_5)(1.73205\xi_7)$
87	4,4086358256E-04	$(-1.11803 + 3.3541\xi_4^2)(1.73205\xi_5)$	124	1,4182559995E-04	$(1.73205\xi_1)(1.73205\xi_5)(1.73205\xi_8)$
88	-7,4935694333E-05	$(-1.11803 + 3.3541\xi_4^2)(1.73205\xi_6)$	125	-2,6328997284E-04	$(1.73205\xi_2)(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_4)$
89	9,6986397450E-05	$(-1.11803 + 3.3541\xi_4^2)(1.73205\xi_7)$	126	-3,5771103902E-04	$(1.73205\xi_2)(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_5)$
90	7,5762202850E-05	$(-1.11803 + 3.3541\xi_4^2)(1.73205\xi_8)$	127	8,5660628788E-05	$(1.73205\xi_2)(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_5)$
91	4,0132933052E-04	$(1.73205\xi_1)(-1.11803 + 3.3541\xi_5^2)$	128	-1,5053940676E-04	$(1.73205\xi_2)(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_6)$
92	2,9296465183E-04	$(1.73205\xi_2)(-1.11803 + 3.3541\xi_5^2)$	129	1,4309403329E-04	$(1.73205\xi_2)(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_7)$
93	-2,7568049988E-04	$(1.73205\xi_3)(-1.11803 + 3.3541\xi_5^2)$	130	-1,9964006993E-04	$(1.73205\xi_2)(1.73205\xi_5)(1.73205\xi_6)$
94	6,7131844888E-04	$(1.73205\xi_4)(-1.11803 + 3.3541\xi_5^2)$	131	1,7197275253E-04	$(1.73205\xi_2)(1.73205\xi_5)(1.73205\xi_7)$
95	-1,6283479980E-04	$(-1.11803 + 3.3541\xi_5^2)(1.73205\xi_6)$	132	-1,9828205060E-05	$(1.73205\xi_2)(1.73205\xi_5)(1.73205\xi_9)$
96	1,2185991566E-04	$(-1.11803 + 3.3541\xi_5^2)(1.73205\xi_7)$	133	-2,0657371765E-05	$(1.73205\xi_2)(1.73205\xi_5)(1.73205\xi_{12})$
97	1,0816561669E-04	$(-1.11803 + 3.3541\xi_5^2)(1.73205\xi_8)$	134	-3,9314261954E-05	$(1.73205\xi_2)(1.73205\xi_5)(1.73205\xi_{13})$
98	6,4041413578E-05	$(1.73205\xi_4)(-1.11803 + 3.3541\xi_6^2)$	135	-8,3462040168E-04	$(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_5)$
99	7,1296796781E-05	$(1.73205\xi_5)(-1.11803 + 3.3541\xi_6^2)$	136	9,2534340822E-05	$(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_6)$
100	1,6050505151E-04	$(1.73205\xi_3)(-1.11803 + 3.3541\xi_7^2)$	137	-6,0223516512E-05	$(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_7)$
101	6,6175177799E-05	$(1.73205\xi_6)(-1.11803 + 3.3541\xi_7^2)$	138	-7,4617366505E-05	$(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_8)$
102	1,7459950728E-05	$(-1.11803 + 3.3541\xi_7^2)(1.73205\xi_{12})$	139	1,4706603496E-04	$(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_5)(1.73205\xi_6)$
103	7,2329946439E-05	$(1.73205\xi_1)(-1.11803 + 3.3541\xi_8^2)$	140	-1,5405171715E-04	$(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_5)(1.73205\xi_7)$
104	1,1463202868E-04	$(1.73205\xi_4)(-1.11803 + 3.3541\xi_8^2)$	141	-1,1378020613E-04	$(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_5)(1.73205\xi_8)$
105	1,6830306373E-04	$(1.73205\xi_5)(-1.11803 + 3.3541\xi_8^2)$	142	-1,9764273556E-04	$(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_6)(1.73205\xi_7)$
106	-8,3451155467E-05	$(1.73205\xi_0)(1.73205\xi_1)(1.73205\xi_5)$	143	7,5947719550E-05	$(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_6)(1.73205\xi_{13})$
107	4,2180029044E-05	$(1.73205\xi_0)(1.73205\xi_2)(1.73205\xi_5)$	144	-4,3259135190E-04	$(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_5)(1.73205\xi_6)$
108	-1,4607466685E-04	$(1.73205\xi_0)(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_5)$	145	3,8974994188E-04	$(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_5)(1.73205\xi_7)$
109	3,8113074320E-05	$(1.73205\xi_0)(1.73205\xi_5)(1.73205\xi_6)$	146	2,6693568208E-04	$(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_5)(1.73205\xi_8)$
110	-3,2917219111E-05	$(1.73205\xi_0)(1.73205\xi_5)(1.73205\xi_7)$	147	-1,0340505804E-04	$(1.73205\xi_5)(1.73205\xi_6)(1.73205\xi_7)$
111	-1,4807758895E-04	$(1.73205\xi_1)(1.73205\xi_2)(1.73205\xi_3)$	148	1,1866244945E-05	$(1.73205\xi_6)(1.73205\xi_7)(1.73205\xi_9)$
112	8,9615460906E-05	$(1.73205\xi_1)(1.73205\xi_2)(1.73205\xi_4)$			

Tableau E. 6 : Coefficients du modèle de substitution du déplacement au point d'auscultation (3/7)

$i$	$a_i^{\ U\ _0}$	$\Psi_i^{Legendre \ U\ _0}$	$i$	$a_i^{\ U\ _0}$	$\Psi_i^{Legendre \ U\ _0}$
0	1,9388093752E-03	1	37	-1,1099481965E-04	$(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_6)$
1	-2,2019578413E-05	$1.73205\xi_0$	38	9,1555398940E-05	$(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_7)$
2	1,6040846393E-04	$1.73205\xi_3$	39	2,1946716123E-04	$(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_8)$
3	-2,5756529066E-04	$1.73205\xi_4$	40	-4,9581025738E-05	$(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_9)$
4	-1,3358257604E-04	$1.73205\xi_5$	41	-1,2047570072E-05	$(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_{13})$
5	9,3282459865E-05	$1.73205\xi_6$	42	-4,1376072431E-05	$(1.73205\xi_5)(1.73205\xi_6)$
6	-8,2024390438E-05	$1.73205\xi_7$	43	4,0179009767E-05	$(1.73205\xi_5)(1.73205\xi_7)$
7	-1,8801650640E-04	$1.73205\xi_8$	44	1,0589159597E-04	$(1.73205\xi_5)(1.73205\xi_8)$
8	-2,8849377135E-04	$1.73205\xi_9$	45	-2,7275787938E-05	$(1.73205\xi_5)(1.73205\xi_9)$
9	8,0583249660E-05	$1.73205\xi_{11}$	46	-3,8493167141E-05	$(1.73205\xi_6)(1.73205\xi_7)$
10	4,3355201555E-05	$1.73205\xi_{12}$	47	-7,8422721409E-05	$(1.73205\xi_6)(1.73205\xi_8)$
11	2,4666225810E-05	$1.73205\xi_{13}$	48	1,7230120903E-05	$(1.73205\xi_6)(1.73205\xi_9)$
12	4,0173284194E-05	$-1.11803 + 3.3541\xi_3^2$	49	7,3651375997E-05	$(1.73205\xi_7)(1.73205\xi_8)$
13	1,6448243200E-04	$-1.11803 + 3.3541\xi_4^2$	50	-1,6777155763E-05	$(1.73205\xi_7)(1.73205\xi_9)$
14	4,1396915039E-05	$-1.11803 + 3.3541\xi_5^2$	51	-4,5367388979E-05	$(1.73205\xi_8)(1.73205\xi_9)$
15	1,3703418154E-05	$-1.11803 + 3.3541\xi_6^2$	52	-1,5773921562E-05	$(1.73205\xi_9)(1.73205\xi_{11})$
16	1,1685801094E-05	$-1.11803 + 3.3541\xi_7^2$	53	-3,9366095983E-05	$(-1.11803 + 3.3541\xi_3^2)(1.73205\xi_4)$
17	5,9209630067E-05	$-1.11803 + 3.3541\xi_8^2$	54	-1,2167843431E-05	$(-1.11803 + 3.3541\xi_3^2)(1.73205\xi_5)$
18	5,8076800611E-05	$-1.11803 + 3.3541\xi_9^2$	55	-2,4273378649E-05	$(-1.11803 + 3.3541\xi_3^2)(1.73205\xi_8)$
19	-7,4797009907E-05	$-3.96863\xi_4 + 6.61438\xi_4^3$	56	-1,2607688286E-05	$(1.73205\xi_0)(-1.11803 + 3.3541\xi_4^2)$
20	-1,7537187595E-05	$-3.96863\xi_5 + 6.61438\xi_5^3$	57	-2,7990201755E-06	$(1.73205\xi_2)(-1.11803 + 3.3541\xi_4^2)$
21	2,3326955267E-05	$1.125 - 11.25\xi_4^2 + 13.125\xi_4^4$	58	1,0016530659E-04	$(1.73205\xi_3)(-1.11803 + 3.3541\xi_4^2)$
22	2,0570745692E-05	$1.125 - 11.25\xi_8^2 + 13.125\xi_8^4$	59	-6,3387806321E-05	$(-1.11803 + 3.3541\xi_4^2)(1.73205\xi_5)$
23	-1,3314095934E-05	$6.21867\xi_8 - 29.0205\xi_8^3 + 26.1184\xi_8^5$	60	5,8409513954E-05	$(-1.11803 + 3.3541\xi_4^2)(1.73205\xi_6)$
24	-1,6282418089E-05	$(1.73205\xi_0)(1.73205\xi_3)$	61	-3,7937639406E-05	$(-1.11803 + 3.3541\xi_4^2)(1.73205\xi_7)$
25	2,3620343955E-05	$(1.73205\xi_0)(1.73205\xi_4)$	62	-1,2773085917E-04	$(-1.11803 + 3.3541\xi_4^2)(1.73205\xi_8)$
26	1,5099164423E-05	$(1.73205\xi_1)(1.73205\xi_4)$	63	1,4158004815E-05	$(-1.11803 + 3.3541\xi_4^2)(1.73205\xi_9)$
27	1,3931135779E-05	$(1.73205\xi_1)(1.73205\xi_8)$	64	8,8305831479E-06	$(-1.11803 + 3.3541\xi_4^2)(1.73205\xi_{12})$
28	4,9240325612E-06	$(1.73205\xi_2)(1.73205\xi_4)$	65	6,5504388050E-06	$(-1.11803 + 3.3541\xi_4^2)(1.73205\xi_{13})$
29	-1,8207841840E-05	$(1.73205\xi_2)(1.73205\xi_5)$	66	1,2764444071E-05	$(1.73205\xi_1)(-1.11803 + 3.3541\xi_5^2)$
30	-1,9323070279E-04	$(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_4)$	67	1,7585531376E-05	$(1.73205\xi_2)(-1.11803 + 3.3541\xi_5^2)$
31	-8,8634739241E-05	$(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_5)$	68	2,7875529324E-05	$(1.73205\xi_3)(-1.11803 + 3.3541\xi_5^2)$
32	6,8585860739E-05	$(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_6)$	69	-2,8933010236E-05	$(1.73205\xi_4)(-1.11803 + 3.3541\xi_5^2)$
33	-6,6082284369E-05	$(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_7)$	70	8,1783736203E-06	$(-1.11803 + 3.3541\xi_5^2)(1.73205\xi_6)$
34	-1,3726628660E-04	$(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_8)$	71	-1,1643868023E-05	$(-1.11803 + 3.3541\xi_5^2)(1.73205\xi_7)$
35	3,4178818154E-05	$(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_9)$	72	-4,4286716655E-05	$(-1.11803 + 3.3541\xi_5^2)(1.73205\xi_8)$
36	1,3312187893E-04	$(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_5)$	73	8,8371816692E-06	$(-1.11803 + 3.3541\xi_5^2)(1.73205\xi_9)$

Tableau E. 7 : Coefficients du modèle de substitution du déplacement au point d'auscultation (4/7)

$i$	$a_i^{  U  _0}$	$\Psi_i^{Legendre   U  _0}$	$i$	$a_i^{  U  _0}$	$\Psi_i^{Legendre   U  _0}$
74	9,7796521201E-06	$(-1.11803 + 3.3541\xi_5^2)(1.73205\xi_{13})$	98	-2,2147560531E-05	$(1.73205\xi_5)(1.125 - 11.25\xi_8^2 + 13.125\xi_8^4)$
75	-1,5739628503E-05	$(-1.11803 + 3.3541\xi_7^2)(1.73205\xi_8)$	99	-1,6885288311E-05	$(1.73205\xi_7)(1.125 - 11.25\xi_8^2 + 13.125\xi_8^4)$
76	2,1254674391E-05	$(1.73205\xi_3)(-1.11803 + 3.3541\xi_8^2)$	100	6,6372082691E-06	$15.2383\xi_{13} - 457.15\xi_{13}^3 + 3885.77\xi_{13}^5 - 14062.8\xi_{13}^7 + 24609.9\xi_{13}^9 - 20582.8\xi_{13}^{11} + 6597.06\xi_{13}^{13}$
77	-3,3304474782E-05	$(1.73205\xi_4)(-1.11803 + 3.3541\xi_8^2)$	101	-6,0382476134E-06	$(-3.96863\xi_0 + 6.61438\xi_0^3)(-1.11803 + 3.3541\xi_3^2)$
78	-8,0708002119E-06	$(1.73205\xi_2)(-1.11803 + 3.3541\xi_1^2)$	102	4,7972061728E-06	$(-3.96863\xi_4 + 6.61438\xi_4^3)(-1.11803 + 3.3541\xi_8^2)$
79	-3,3431151972E-05	$(1.73205\xi_3)(-3.96863\xi_4 + 6.61438\xi_4^3)$	103	-5,5753217769E-06	$(-1.11803 + 3.3541\xi_0^2)(-3.96863\xi_5 + 6.61438\xi_5^3)$
80	1,3106414443E-05	$(-3.96863\xi_4 + 6.61438\xi_4^3)(1.73205\xi_5)$	104	1,2954862345E-05	$(-1.11803 + 3.3541\xi_4^2)(-3.96863\xi_8 + 6.61438\xi_8^3)$
81	-1,7639920662E-05	$(-3.96863\xi_4 + 6.61438\xi_4^3)(1.73205\xi_6)$	105	-7,7904943829E-06	$(6.21867\xi_0 - 29.0205\xi_0^3 + 26.1184\xi_0^5)(1.73205\xi_{13})$
82	3,8202021383E-05	$(-3.96863\xi_4 + 6.61438\xi_4^3)(1.73205\xi_8)$	106	-5,0792915546E-06	$(6.21867\xi_2 - 29.0205\xi_2^3 + 26.1184\xi_2^5)(1.73205\xi_{12})$
83	-1,0648806771E-05	$(-3.96863\xi_4 + 6.61438\xi_4^3)(1.73205\xi_{12})$	107	7,6822690157E-06	$(1.73205\xi_5)(6.21867\xi_8 - 29.0205\xi_8^3 + 26.1184\xi_8^5)$
84	1,1897839709E-05	$(-3.96863\xi_5 + 6.61438\xi_5^3)(1.73205\xi_8)$	108	-1,1429450611E-05	$(1.73205\xi_0)(1.73205\xi_2)(1.73205\xi_8)$
85	-6,6356065393E-06	$(-3.96863\xi_5 + 6.61438\xi_5^3)(1.73205\xi_9)$	109	1,1399751593E-05	$(1.73205\xi_0)(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_4)$
86	-7,5729734174E-06	$(-3.96863\xi_5 + 6.61438\xi_5^3)(1.73205\xi_{13})$	110	6,5626704675E-06	$(1.73205\xi_0)(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_6)$
87	-1,0970458392E-05	$(1.73205\xi_4)(-3.96863\xi_8 + 6.61438\xi_8^3)$	111	-1,4047602740E-05	$(1.73205\xi_0)(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_8)$
88	9,3707528208E-06	$(1.73205\xi_6)(-3.96863\xi_8 + 6.61438\xi_8^3)$	112	-4,9712968228E-06	$(1.73205\xi_0)(1.73205\xi_1)(1.73205\xi_{12})$
89	6,6905458653E-06	$(1.73205\xi_4)(-3.96863\xi_{10} + 6.61438\xi_{10}^3)$	113	-2,3604248458E-05	$(1.73205\xi_1)(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_8)$
90	6,1613805978E-06	$(-1.11803 + 3.3541\xi_0^2)(-1.11803 + 3.3541\xi_{13}^2)$	114	-1,7070795319E-05	$(1.73205\xi_2)(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_5)$
91	-3,6553658243E-06	$(-1.11803 + 3.3541\xi_4^2)(-1.11803 + 3.3541\xi_8^2)$	115	2,6630780361E-05	$(1.73205\xi_2)(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_5)$
92	1,0074409035E-05	$(1.125 - 11.25\xi_4^2 + 13.125\xi_4^4)(1.73205\xi_6)$	116	-1,2026987629E-05	$(1.73205\xi_2)(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_8)$
93	1,0346410037E-05	$(1.125 - 11.25\xi_4^2 + 13.125\xi_4^4)(1.73205\xi_{12})$	117	1,9604557906E-05	$(1.73205\xi_2)(1.73205\xi_5)(1.73205\xi_7)$
94	9,0150416417E-06	$(1.73205\xi_2)(1.125 - 11.25\xi_5^2 + 13.125\xi_5^4)$	118	2,4640213577E-05	$(1.73205\xi_2)(1.73205\xi_5)(1.73205\xi_8)$
95	6,8446863047E-06	$(1.125 - 11.25\xi_5^2 + 13.125\xi_5^4)(1.73205\xi_9)$	119	-1,9588462660E-06	$(1.73205\xi_2)(1.73205\xi_7)(1.73205\xi_{13})$
96	2,2987662993E-05	$(1.73205\xi_3)(1.125 - 11.25\xi_8^2 + 13.125\xi_8^4)$	120	7,2797862326E-05	$(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_5)$
97	-2,5305380419E-05	$(1.73205\xi_4)(1.125 - 11.25\xi_8^2 + 13.125\xi_8^4)$	121	-6,3031968174E-05	$(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_6)$

Tableau E. 8 : Coefficients du modèle de substitution du déplacement au point d'auscultation (5/7)

$i$	$a_i^{  U  _0}$	$\Psi_i^{Legendre   U  _0}$	$i$	$a_i^{  U  _0}$	$\Psi_i^{Legendre   U  _0}$
122	4,0708924284E-05	$(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_7)$	144	3,0676748776E-05	$(1.73205\xi_6)(1.73205\xi_7)(1.73205\xi_8)$
123	1,4538489595E-04	$(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_8)$	145	1,5103462962E-05	$(1.73205\xi_7)(1.73205\xi_8)(1.73205\xi_9)$
124	-1,9615316799E-05	$(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_9)$	146	-4,0514235867E-06	$(-1.12673 + 23.6614\xi_3^2 - 70.9843\xi_3^4 + 52.0551\xi_3^6)(1.73205\xi_5)$
125	-2,4770168356E-05	$(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_5)(1.73205\xi_6)$	147	-5,8296597043E-06	$(-1.12673 + 23.6614\xi_6^2 - 70.9843\xi_6^4 + 52.0551\xi_6^6)(1.73205\xi_8)$
126	2,5900977333E-05	$(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_5)(1.73205\xi_7)$	148	-5,7650961280E-06	$(-1.12673 + 23.6614\xi_7^2 - 70.9843\xi_7^4 + 52.0551\xi_7^6)(1.73205\xi_9)$
127	7,4107277644E-05	$(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_5)(1.73205\xi_8)$	149	1,1832498856E-05	$(-1.11803 + 3.3541\xi_5^2)(1.125 - 11.25\xi_8^2 + 13.125\xi_8^4)$
128	-4,8559583314E-05	$(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_6)(1.73205\xi_8)$	150	-1,4311611166E-05	$(-3.96863\xi_4 + 6.61438\xi_4^3 - 3.96863\xi_8 + 6.61438\xi_8^3)$
129	3,7095925187E-05	$(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_7)(1.73205\xi_8)$	151	7,3422511710E-06	$-1.12817 + 192.918\xi_5^2 - 5401.69\xi_5^4 + 57978.2\xi_5^6 - 310597\xi_5^8 + 931792\xi_5^{10} - 1.6377e+006\xi_5^{12} + 1.67369e+006\xi_5^{14} - 920529\xi_5^{16} + 210579\xi_5^{18}$
130	-2,4770464348E-05	$(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_8)(1.73205\xi_9)$	152	1,0312304126E-05	$(-8.47215\xi_2 + 76.2494\xi_2^3 - 167.749\xi_2^5 + 103.844\xi_2^7)(1.73205\xi_{11})$
131	2,9250868293E-05	$(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_5)(1.73205\xi_6)$	153	1,0499515735E-05	$(1.73205\xi_1)(-8.47215\xi_4 + 76.2494\xi_4^3 - 167.749\xi_4^5 + 103.844\xi_4^7)$
132	-2,1242191687E-05	$(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_5)(1.73205\xi_7)$	154	6,0963556656E-06	$(-8.47215\xi_4 + 76.2494\xi_4^3 - 167.749\xi_4^5 + 103.844\xi_4^7)(1.73205\xi_{13})$
133	-9,9833258611E-05	$(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_5)(1.73205\xi_8)$	155	-1,0255138973E-05	$(6.21867\xi_0 - 29.0205\xi_0^3 + 26.1184\xi_0^5)(-1.11803 + 3.3541\xi_3^2)$
134	2,9989072669E-05	$(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_6)(1.73205\xi_7)$	156	-7,8508693835E-06	$(6.21867\xi_0 - 29.0205\xi_0^3 + 26.1184\xi_0^5)(-1.11803 + 3.3541\xi_4^2)$
135	8,6603170187E-05	$(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_6)(1.73205\xi_8)$	157	-6,8393557202E-06	$(-1.11803 + 3.3541\xi_7^2)(6.21867\xi_5 - 29.0205\xi_5^3 + 26.1184\xi_5^5)$
136	-1,0072094268E-05	$(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_6)(1.73205\xi_{13})$	158	-4,2913962350E-06	$(6.21867\xi_5 - 29.0205\xi_5^3 + 26.1184\xi_5^5)(-1.11803 + 3.3541\xi_9^2)$
137	-6,9751608620E-05	$(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_7)(1.73205\xi_8)$	159	-4,1450776556E-06	$(-1.11803 + 3.3541\xi_7^2)(6.21867\xi_8 - 29.0205\xi_8^3 + 26.1184\xi_8^5)$
138	3,7155918370E-05	$(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_8)(1.73205\xi_9)$	160	2,2847284031E-06	$-22.007\xi_{13} + 1386.44\xi_{13}^3 - 25510.5\xi_{13}^5 + 212588\xi_{13}^7 - 956644\xi_{13}^9 + 2.52206e+006\xi_{13}^{11} - 4.00943e+006\xi_{13}^{13} + 3.78032e+006\xi_{13}^{15} - 1.94575e+006\xi_{13}^{17} + 421011\xi_{13}^{19}$
139	1,2036207297E-05	$(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_8)(1.73205\xi_{13})$	161	9,4747074154E-06	$(1.12741 - 40.5868\xi_3^2 + 223.228\xi_3^4 - 386.928\xi_3^6 + 207.283\xi_3^8)(1.73205\xi_8)$
140	3,9168345869E-05	$(1.73205\xi_5)(1.73205\xi_6)(1.73205\xi_8)$	162	6,4310068774E-06	$(-1.11803 + 3.3541\xi_0^2)(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_{13})$
141	-3,8596517651E-05	$(1.73205\xi_5)(1.73205\xi_7)(1.73205\xi_8)$	163	-5,5315894087E-06	$(-1.11803 + 3.3541\xi_0^2)(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_{13})$
142	2,0912680733E-05	$(1.73205\xi_5)(1.73205\xi_8)(1.73205\xi_9)$	164	-6,9214428755E-06	$(1.73205\xi_0)(-1.11803 + 3.3541\xi_1^2)(1.73205\xi_2)$
143	-1,0685305109E-05	$(1.73205\xi_5)(1.73205\xi_9)(1.73205\xi_{13})$			

Tableau E. 9 : Coefficients du modèle de substitution du déplacement au point d'auscultation (6/7)

$i$	$a_i^{\tau_c}$	$\Psi_i^{Legendre \tau_c}$	$i$	$a_i^{\tau_c}$	$\Psi_i^{Legendre \tau_c}$
0	5,1380543843E+00	1	37	-3,2007670415E-02	(1.73205 $\xi_4$ )(1.73205 $\xi_5$ )
1	5,3696494031E-02	1.73205 $\xi_0$	38	1,6288680241E-02	(1.73205 $\xi_4$ )(1.73205 $\xi_6$ )
2	-7,9493558318E-02	1.73205 $\xi_1$	39	-1,9749693410E-02	(1.73205 $\xi_4$ )(1.73205 $\xi_7$ )
3	-9,5274217038E-02	1.73205 $\xi_2$	40	-2,7872914257E-02	(1.73205 $\xi_4$ )(1.73205 $\xi_8$ )
4	4,5992095775E-02	1.73205 $\xi_3$	41	8,2331428544E-03	(1.73205 $\xi_5$ )(1.73205 $\xi_6$ )
5	3,1248884143E-01	1.73205 $\xi_4$	42	-7,3288148141E-03	(1.73205 $\xi_5$ )(1.73205 $\xi_7$ )
6	1,2471363435E-02	1.73205 $\xi_5$	43	-1,2562526343E-02	(1.73205 $\xi_5$ )(1.73205 $\xi_8$ )
7	1,6986628946E-02	1.73205 $\xi_6$	44	3,7373833052E-03	(1.73205 $\xi_5$ )(1.73205 $\xi_9$ )
8	-1,0240319631E-02	1.73205 $\xi_7$	45	7,0849138601E-03	(1.73205 $\xi_6$ )(1.73205 $\xi_7$ )
9	7,0273408713E-01	1.73205 $\xi_8$	46	6,6004879569E-03	(-1.11803 + 3.3541 $\xi_0^2$ )(1.73205 $\xi_2$ )
10	2,1085947104E-02	1.73205 $\xi_9$	47	-8,9835049751E-03	(-1.11803 + 3.3541 $\xi_2^2$ )(1.73205 $\xi_8$ )
11	-1,3755387782E-02	-1.11803 + 3.3541 $\xi_0^2$	48	-8,3153013062E-03	(-1.11803 + 3.3541 $\xi_3^2$ )(1.73205 $\xi_4$ )
12	-1,7256433648E-02	-1.11803 + 3.3541 $\xi_3^2$	49	8,1025315594E-03	(1.73205 $\xi_2$ )(-1.11803 + 3.3541 $\xi_4^2$ )
13	-7,9661470152E-02	-1.11803 + 3.3541 $\xi_4^2$	50	-7,1570842116E-03	(1.73205 $\xi_3$ )(-1.11803 + 3.3541 $\xi_4^2$ )
14	-9,9310416062E-03	-1.11803 + 3.3541 $\xi_5^2$	51	3,2580033704E-02	(-1.11803 + 3.3541 $\xi_4^2$ )(1.73205 $\xi_8$ )
15	2,7524722378E-01	-1.11803 + 3.3541 $\xi_8^2$	52	-7,8821517334E-03	(1.73205 $\xi_1$ )(-1.11803 + 3.3541 $\xi_5^2$ )
16	5,4952069092E-03	-3.96863 $\xi_0$ + 6.61438 $\xi_0^3$	53	6,2152274558E-03	(1.73205 $\xi_3$ )(-1.11803 + 3.3541 $\xi_5^2$ )
17	1,5554738939E-02	-3.96863 $\xi_4$ + 6.61438 $\xi_4^3$	54	-1,1661017853E-02	(1.73205 $\xi_4$ )(-1.11803 + 3.3541 $\xi_5^2$ )
18	-8,1456372794E-03	-3.96863 $\xi_5$ + 6.61438 $\xi_5^3$	55	-1,2824556004E-02	(-1.11803 + 3.3541 $\xi_5^2$ )(1.73205 $\xi_8$ )
19	1,4874181807E-01	-3.96863 $\xi_8$ + 6.61438 $\xi_8^3$	56	-4,7676215569E-03	(1.73205 $\xi_0$ )(-1.11803 + 3.3541 $\xi_8^2$ )
20	-2,1099181361E-02	(1.73205 $\xi_0$ )(1.73205 $\xi_2$ )	57	6,4038216422E-03	(1.73205 $\xi_2$ )(-1.11803 + 3.3541 $\xi_8^2$ )
21	-8,7367892463E-03	(1.73205 $\xi_0$ )(1.73205 $\xi_4$ )	58	1,6526684048E-02	(1.73205 $\xi_3$ )(-1.11803 + 3.3541 $\xi_8^2$ )
22	-6,6571669167E-03	(1.73205 $\xi_1$ )(1.73205 $\xi_2$ )	59	5,1843645920E-03	(1.73205 $\xi_0$ )(1.73205 $\xi_3$ )(1.73205 $\xi_7$ )
23	1,5347154216E-02	(1.73205 $\xi_1$ )(1.73205 $\xi_3$ )	60	-5,1445371524E-03	(1.73205 $\xi_0$ )(1.73205 $\xi_4$ )(1.73205 $\xi_7$ )
24	-1,8180612975E-02	(1.73205 $\xi_1$ )(1.73205 $\xi_4$ )	61	7,2419542812E-03	(1.73205 $\xi_0$ )(1.73205 $\xi_4$ )(1.73205 $\xi_8$ )
25	-1,0895694030E-02	(1.73205 $\xi_1$ )(1.73205 $\xi_5$ )	62	-8,8498911793E-03	(1.73205 $\xi_1$ )(1.73205 $\xi_2$ )(1.73205 $\xi_5$ )
26	1,0445172857E-02	(1.73205 $\xi_2$ )(1.73205 $\xi_3$ )	63	1,4490020315E-02	(1.73205 $\xi_1$ )(1.73205 $\xi_3$ )(1.73205 $\xi_5$ )
27	-7,6589855012E-03	(1.73205 $\xi_2$ )(1.73205 $\xi_4$ )	64	-6,6517440355E-03	(1.73205 $\xi_1$ )(1.73205 $\xi_3$ )(1.73205 $\xi_8$ )
28	-1,3047358712E-02	(1.73205 $\xi_2$ )(1.73205 $\xi_5$ )	65	-1,5219304973E-02	(1.73205 $\xi_1$ )(1.73205 $\xi_4$ )(1.73205 $\xi_5$ )
29	6,2707888299E-03	(1.73205 $\xi_2$ )(1.73205 $\xi_6$ )	66	1,5188880618E-02	(1.73205 $\xi_2$ )(1.73205 $\xi_3$ )(1.73205 $\xi_4$ )
30	-6,1204459200E-03	(1.73205 $\xi_2$ )(1.73205 $\xi_7$ )	67	6,6974346235E-03	(1.73205 $\xi_2$ )(1.73205 $\xi_3$ )(1.73205 $\xi_5$ )
31	2,3843235323E-02	(1.73205 $\xi_2$ )(1.73205 $\xi_8$ )	68	-7,4758647847E-03	(1.73205 $\xi_2$ )(1.73205 $\xi_3$ )(1.73205 $\xi_8$ )
32	4,2963098004E-02	(1.73205 $\xi_3$ )(1.73205 $\xi_4$ )	69	-8,9795817039E-03	(1.73205 $\xi_2$ )(1.73205 $\xi_4$ )(1.73205 $\xi_5$ )
33	2,5701726203E-02	(1.73205 $\xi_3$ )(1.73205 $\xi_5$ )	70	2,3899828001E-02	(1.73205 $\xi_3$ )(1.73205 $\xi_4$ )(1.73205 $\xi_5$ )
34	-1,4791539415E-02	(1.73205 $\xi_3$ )(1.73205 $\xi_6$ )	71	-1,9903669110E-02	(1.73205 $\xi_3$ )(1.73205 $\xi_4$ )(1.73205 $\xi_8$ )
35	1,4045183008E-02	(1.73205 $\xi_3$ )(1.73205 $\xi_7$ )	72	-1,0083174255E-02	(1.73205 $\xi_4$ )(1.73205 $\xi_5$ )(1.73205 $\xi_7$ )
36	-7,1780017307E-03	(1.73205 $\xi_3$ )(1.73205 $\xi_9$ )			

Tableau E. 10 : Coefficients du modèle de substitution du déplacement au point d'auscultation (7/7)

$i$	$a_i^{\tau_L}$	$\Psi_i^{Legendre \tau_L}$
0	6,1330956942E+00	1
1	6,0925959910E-02	$1.73205\xi_0$
2	-2,5408194861E-02	$1.73205\xi_1$
3	-2,7564944864E-02	$1.73205\xi_2$
4	-8,7510941244E-02	$1.73205\xi_3$
5	4,0076305167E-01	$1.73205\xi_4$
6	7,7528623006E-02	$1.73205\xi_5$
7	-5,1848603388E-02	$1.73205\xi_6$
8	4,4887639250E-02	$1.73205\xi_7$
9	6,6143215907E-01	$1.73205\xi_8$
10	-2,2027623006E-02	$1.73205\xi_9$
11	-1,4504015046E-02	$-1.11803 + 3.3541\xi_0^2$
12	1,8395690820E-02	$-1.11803 + 3.3541\xi_3^2$
13	-6,0145692805E-02	$-1.11803 + 3.3541\xi_4^2$
14	-4,9108902808E-02	$-1.11803 + 3.3541\xi_5^2$
15	2,6984359578E-01	$-1.11803 + 3.3541\xi_8^2$
16	1,4299946756E-01	$-3.96863\xi_8 + 6.61438\xi_8^3$
17	-1,8210425938E-02	$(1.73205\xi_0)(1.73205\xi_2)$
18	1,2456698944E-02	$(1.73205\xi_0)(1.73205\xi_5)$
19	-1,2940670074E-02	$(1.73205\xi_1)(1.73205\xi_5)$
20	1,9373146052E-02	$(1.73205\xi_2)(1.73205\xi_8)$
21	1,3119547887E-02	$(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_5)$
22	-2,3309321557E-02	$(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_5)$
23	-2,7845494315E-02	$(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_8)$
24	-2,6343459050E-02	$(1.73205\xi_5)(1.73205\xi_8)$
25	-1,1780251904E-02	$(1.73205\xi_2)(-1.11803 + 3.3541\xi_5^2)$
26	-2,2301575317E-02	$(1.73205\xi_4)(-1.11803 + 3.3541\xi_5^2)$
27	-8,7144004831E-03	$(1.73205\xi_0)(-1.11803 + 3.3541\xi_8^2)$
28	9,2696006577E-03	$(1.73205\xi_2)(-1.11803 + 3.3541\xi_8^2)$
29	-1,1461698056E-02	$(1.73205\xi_1)(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_5)$
30	1,3683972459E-02	$(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_5)$
31	-9,9647489561E-03	$(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_5)(1.73205\xi_8)$



### E.5. Coefficients du model de substitution du déplacement maximal de la console

Tableau E. 11 : Coefficients du modèle de substitution du déplacement maximal de la console (1/5)

$i$	$a_i^{  U  _{Max}}$	$\Psi_i^{Legendre   U  _{Max}}$	$i$	$a_i^{  U  _{Max}}$	$\Psi_i^{Legendre   U  _{Max}}$
0	2,2986435380E-02	1	39	1,3098760897E-04	$(1,73205\xi_1)(1,73205\xi_8)$
1	1,6804621799E-04	$1,73205\xi_0$	40	-3,8782324562E-05	$(1,73205\xi_1)(1,73205\xi_9)$
2	-2,2536003001E-03	$1,73205\xi_1$	41	-3,8738253386E-05	$(1,73205\xi_1)(1,73205\xi_{12})$
3	-2,2218263531E-03	$1,73205\xi_2$	42	-8,2880344086E-05	$(1,73205\xi_1)(1,73205\xi_{13})$
4	8,8846328555E-03	$1,73205\xi_3$	43	-4,3595876456E-04	$(1,73205\xi_2)(1,73205\xi_3)$
5	-3,9176038032E-03	$1,73205\xi_4$	44	-3,4820922335E-04	$(1,73205\xi_2)(1,73205\xi_4)$
6	-4,9921961583E-03	$1,73205\xi_5$	45	-7,4492671254E-04	$(1,73205\xi_2)(1,73205\xi_5)$
7	4,8288521112E-03	$1,73205\xi_6$	46	-2,2236093849E-04	$(1,73205\xi_2)(1,73205\xi_6)$
8	-4,3257695544E-03	$1,73205\xi_7$	47	1,8232436570E-04	$(1,73205\xi_2)(1,73205\xi_7)$
9	4,7842371186E-04	$1,73205\xi_8$	48	-3,8814074079E-05	$(1,73205\xi_2)(1,73205\xi_9)$
10	3,5289991090E-04	$1,73205\xi_9$	49	-3,8632938111E-05	$(1,73205\xi_2)(1,73205\xi_{12})$
11	-3,4790197749E-05	$1,73205\xi_{11}$	50	-8,4657934068E-05	$(1,73205\xi_2)(1,73205\xi_{13})$
12	3,9450605229E-04	$1,73205\xi_{12}$	51	-8,2006610441E-04	$(1,73205\xi_3)(1,73205\xi_4)$
13	8,7676311347E-04	$1,73205\xi_{13}$	52	-1,0643197240E-03	$(1,73205\xi_3)(1,73205\xi_5)$
14	-6,0824306644E-05	$-1,11803 + 3,3541\xi_0^2$	53	1,6193792618E-03	$(1,73205\xi_3)(1,73205\xi_6)$
15	-1,0077146015E-04	$-1,11803 + 3,3541\xi_1^2$	54	-1,4186547282E-03	$(1,73205\xi_3)(1,73205\xi_7)$
16	8,9968170958E-05	$-1,11803 + 3,3541\xi_2^2$	55	8,2450387508E-05	$(1,73205\xi_3)(1,73205\xi_9)$
17	3,7338641450E-04	$-1,11803 + 3,3541\xi_3^2$	56	1,5638914168E-04	$(1,73205\xi_3)(1,73205\xi_{12})$
18	3,6661360964E-04	$-1,11803 + 3,3541\xi_4^2$	57	3,4334426831E-04	$(1,73205\xi_3)(1,73205\xi_{13})$
19	7,6693660481E-04	$-1,11803 + 3,3541\xi_5^2$	58	-6,8761865351E-04	$(1,73205\xi_4)(1,73205\xi_5)$
20	8,6552953317E-05	$-1,11803 + 3,3541\xi_6^2$	59	-4,0499240533E-04	$(1,73205\xi_4)(1,73205\xi_6)$
21	5,5115011511E-04	$-1,11803 + 3,3541\xi_7^2$	60	3,6429567349E-04	$(1,73205\xi_4)(1,73205\xi_7)$
22	1,5220279975E-04	$-1,11803 + 3,3541\xi_8^2$	61	1,5131315334E-04	$(1,73205\xi_4)(1,73205\xi_8)$
23	-4,9969188493E-05	$-1,11803 + 3,3541\xi_9^2$	62	-6,0584574213E-05	$(1,73205\xi_4)(1,73205\xi_{12})$
24	-5,8238670963E-05	$-3,96863\xi_3 + 6,61438\xi_3^3$	63	-1,4148442944E-04	$(1,73205\xi_4)(1,73205\xi_{13})$
25	-4,9933109216E-05	$-3,96863\xi_7 + 6,61438\xi_7^3$	64	-5,3017815626E-04	$(1,73205\xi_5)(1,73205\xi_6)$
26	8,8099926066E-05	$-3,96863\xi_8 + 6,61438\xi_8^3$	65	4,4104879861E-04	$(1,73205\xi_5)(1,73205\xi_7)$
27	-7,8335080688E-05	$(1,73205\xi_0)(1,73205\xi_2)$	66	2,7126906600E-04	$(1,73205\xi_5)(1,73205\xi_8)$
28	9,1884257220E-05	$(1,73205\xi_0)(1,73205\xi_3)$	67	-4,5365011648E-05	$(1,73205\xi_5)(1,73205\xi_9)$
29	-7,0091137476E-05	$(1,73205\xi_0)(1,73205\xi_4)$	68	-8,6455743044E-05	$(1,73205\xi_5)(1,73205\xi_{12})$
30	-2,1242992183E-04	$(1,73205\xi_0)(1,73205\xi_5)$	69	-1,8847790686E-04	$(1,73205\xi_5)(1,73205\xi_{13})$
31	4,3978795680E-05	$(1,73205\xi_0)(1,73205\xi_6)$	70	-7,4715254643E-04	$(1,73205\xi_6)(1,73205\xi_7)$
32	-3,3462145630E-05	$(1,73205\xi_0)(1,73205\xi_8)$	71	3,9495698609E-05	$(1,73205\xi_6)(1,73205\xi_9)$
33	-1,5415373300E-04	$(1,73205\xi_1)(1,73205\xi_2)$	72	8,6260604898E-05	$(1,73205\xi_6)(1,73205\xi_{12})$
34	-5,6430482227E-04	$(1,73205\xi_1)(1,73205\xi_3)$	73	1,9638899641E-04	$(1,73205\xi_6)(1,73205\xi_{13})$
35	-2,3405880896E-04	$(1,73205\xi_1)(1,73205\xi_4)$	74	-7,4436197507E-05	$(1,73205\xi_7)(1,73205\xi_{12})$
36	-2,6366954166E-04	$(1,73205\xi_1)(1,73205\xi_5)$	75	-1,5777215142E-04	$(1,73205\xi_7)(1,73205\xi_{13})$
37	-2,7076146104E-04	$(1,73205\xi_1)(1,73205\xi_6)$	76	3,6141261161E-05	$(1,73205\xi_8)(1,73205\xi_9)$
38	2,4123111554E-04	$(1,73205\xi_1)(1,73205\xi_7)$	77	1,5477982987E-05	$(-1,11803 + 3,3541\xi_0^2)(1,73205\xi_5)$



Tableau E. 12 : Coefficients du modèle de substitution du déplacement maximal de la console (2/5)

$i$	$a_i^{  U  _{Max}}$	$\Psi_i^{Legendre   U  _{Max}}$	$i$	$a_i^{  U  _{Max}}$	$\Psi_i^{Legendre   U  _{Max}}$
78	4,5434106999E-05	$(-1,11803 + 3,3541\xi_1^2)(1,73205\xi_4)$	117	7,2601315615E-05	$(1,73205\xi_1)(1,73205\xi_2)(1,73205\xi_4)$
79	7,7227259616E-05	$(-1,11803 + 3,3541\xi_1^2)(1,73205\xi_5)$	118	6,2040420014E-05	$(1,73205\xi_1)(1,73205\xi_2)(1,73205\xi_5)$
80	-5,1824455853E-05	$(-1,11803 + 3,3541\xi_1^2)(1,73205\xi_6)$	119	-5,0190467560E-05	$(1,73205\xi_1)(1,73205\xi_2)(1,73205\xi_6)$
81	3,6811986040E-05	$(-1,11803 + 3,3541\xi_1^2)(1,73205\xi_7)$	120	6,0738222768E-05	$(1,73205\xi_1)(1,73205\xi_2)(1,73205\xi_7)$
82	2,2019141384E-05	$(1,73205\xi_0)(-1,11803 + 3,3541\xi_2^2)$	121	-2,5511128506E-04	$(1,73205\xi_1)(1,73205\xi_3)(1,73205\xi_4)$
83	5,4961307922E-05	$(-1,11803 + 3,3541\xi_2^2)(1,73205\xi_4)$	122	-3,4808461187E-04	$(1,73205\xi_1)(1,73205\xi_3)(1,73205\xi_5)$
84	7,7996112063E-05	$(-1,11803 + 3,3541\xi_2^2)(1,73205\xi_5)$	123	3,2722743428E-04	$(1,73205\xi_1)(1,73205\xi_4)(1,73205\xi_5)$
85	5,6088866880E-05	$(1,73205\xi_1)(-1,11803 + 3,3541\xi_3^2)$	124	-1,1220388589E-04	$(1,73205\xi_1)(1,73205\xi_4)(1,73205\xi_6)$
86	7,0159892165E-05	$(1,73205\xi_2)(-1,11803 + 3,3541\xi_3^2)$	125	1,3465458176E-04	$(1,73205\xi_1)(1,73205\xi_4)(1,73205\xi_7)$
87	1,6635981605E-04	$(-1,11803 + 3,3541\xi_3^2)(1,73205\xi_4)$	126	7,3239522842E-05	$(1,73205\xi_1)(1,73205\xi_4)(1,73205\xi_8)$
88	2,3672668812E-04	$(-1,11803 + 3,3541\xi_3^2)(1,73205\xi_5)$	127	-1,6888241749E-04	$(1,73205\xi_1)(1,73205\xi_5)(1,73205\xi_6)$
89	1,6573736424E-04	$(1,73205\xi_1)(-1,11803 + 3,3541\xi_4^2)$	128	1,7524322066E-04	$(1,73205\xi_1)(1,73205\xi_5)(1,73205\xi_7)$
90	1,2084906690E-04	$(1,73205\xi_2)(-1,11803 + 3,3541\xi_4^2)$	129	1,1607484060E-04	$(1,73205\xi_1)(1,73205\xi_5)(1,73205\xi_8)$
91	-8,7607564087E-05	$(1,73205\xi_3)(-1,11803 + 3,3541\xi_4^2)$	130	-2,1612879693E-04	$(1,73205\xi_2)(1,73205\xi_3)(1,73205\xi_4)$
92	3,6100657285E-04	$(-1,11803 + 3,3541\xi_4^2)(1,73205\xi_5)$	131	-2,9335150615E-04	$(1,73205\xi_2)(1,73205\xi_3)(1,73205\xi_5)$
93	-6,4304402519E-05	$(-1,11803 + 3,3541\xi_4^2)(1,73205\xi_6)$	132	7,0203944416E-05	$(1,73205\xi_2)(1,73205\xi_4)(1,73205\xi_5)$
94	8,1851940976E-05	$(-1,11803 + 3,3541\xi_4^2)(1,73205\xi_7)$	133	-1,2466039206E-04	$(1,73205\xi_2)(1,73205\xi_4)(1,73205\xi_6)$
95	6,9268148545E-05	$(-1,11803 + 3,3541\xi_4^2)(1,73205\xi_8)$	134	1,1751907622E-04	$(1,73205\xi_2)(1,73205\xi_4)(1,73205\xi_7)$
96	3,2455810831E-04	$(1,73205\xi_1)(-1,11803 + 3,3541\xi_5^2)$	135	-1,6307989925E-04	$(1,73205\xi_2)(1,73205\xi_5)(1,73205\xi_6)$
97	2,4065036658E-04	$(1,73205\xi_2)(-1,11803 + 3,3541\xi_5^2)$	136	1,4013160386E-04	$(1,73205\xi_2)(1,73205\xi_5)(1,73205\xi_7)$
98	-2,2768389426E-04	$(1,73205\xi_3)(-1,11803 + 3,3541\xi_5^2)$	137	-1,4455170931E-05	$(1,73205\xi_2)(1,73205\xi_5)(1,73205\xi_9)$
99	5,4919667379E-04	$(1,73205\xi_4)(-1,11803 + 3,3541\xi_5^2)$	138	-1,7318752710E-05	$(1,73205\xi_2)(1,73205\xi_5)(1,73205\xi_{12})$
100	-1,3258639206E-04	$(-1,11803 + 3,3541\xi_5^2)(1,73205\xi_6)$	139	-2,5375586130E-05	$(1,73205\xi_2)(1,73205\xi_5)(1,73205\xi_{13})$
101	1,0076188579E-04	$(-1,11803 + 3,3541\xi_5^2)(1,73205\xi_7)$	140	-6,8435804092E-04	$(1,73205\xi_3)(1,73205\xi_4)(1,73205\xi_5)$
102	9,0613247125E-05	$(-1,11803 + 3,3541\xi_5^2)(1,73205\xi_8)$	141	8,1375899343E-05	$(1,73205\xi_3)(1,73205\xi_4)(1,73205\xi_6)$
103	5,3046438131E-05	$(1,73205\xi_4)(-1,11803 + 3,3541\xi_6^2)$	142	-5,3922002351E-05	$(1,73205\xi_3)(1,73205\xi_4)(1,73205\xi_7)$
104	5,6426365866E-05	$(1,73205\xi_5)(-1,11803 + 3,3541\xi_6^2)$	143	-6,6400554370E-05	$(1,73205\xi_3)(1,73205\xi_4)(1,73205\xi_8)$
105	1,3200187007E-04	$(1,73205\xi_3)(-1,11803 + 3,3541\xi_7^2)$	144	1,2098688335E-04	$(1,73205\xi_3)(1,73205\xi_5)(1,73205\xi_6)$
106	5,7184799337E-05	$(1,73205\xi_6)(-1,11803 + 3,3541\xi_7^2)$	145	-1,2556551864E-04	$(1,73205\xi_3)(1,73205\xi_5)(1,73205\xi_7)$
107	1,6776052998E-05	$(-1,11803 + 3,3541\xi_7^2)(1,73205\xi_{12})$	146	-9,5486610813E-05	$(1,73205\xi_3)(1,73205\xi_5)(1,73205\xi_8)$
108	6,1818790863E-05	$(1,73205\xi_1)(-1,11803 + 3,3541\xi_8^2)$	147	-1,6139271496E-04	$(1,73205\xi_3)(1,73205\xi_6)(1,73205\xi_7)$
109	9,1875415112E-05	$(1,73205\xi_4)(-1,11803 + 3,3541\xi_8^2)$	148	5,8686780266E-05	$(1,73205\xi_3)(1,73205\xi_6)(1,73205\xi_{13})$
110	1,4083812053E-04	$(1,73205\xi_5)(-1,11803 + 3,3541\xi_8^2)$	149	-3,6076134160E-04	$(1,73205\xi_4)(1,73205\xi_5)(1,73205\xi_6)$
111	-6,9241396981E-05	$(1,73205\xi_0)(1,73205\xi_1)(1,73205\xi_5)$	150	3,1995990483E-04	$(1,73205\xi_4)(1,73205\xi_5)(1,73205\xi_7)$
112	3,7162336888E-05	$(1,73205\xi_0)(1,73205\xi_2)(1,73205\xi_5)$	151	2,2144707198E-04	$(1,73205\xi_4)(1,73205\xi_5)(1,73205\xi_8)$
113	-1,1959361116E-04	$(1,73205\xi_0)(1,73205\xi_4)(1,73205\xi_5)$	152	-8,3988515528E-05	$(1,73205\xi_5)(1,73205\xi_6)(1,73205\xi_7)$
114	2,9928227052E-05	$(1,73205\xi_0)(1,73205\xi_5)(1,73205\xi_6)$	153	4,0420127199E-05	$(1,73205\xi_5)(1,73205\xi_7)(1,73205\xi_8)$
115	-2,5353417574E-05	$(1,73205\xi_0)(1,73205\xi_5)(1,73205\xi_7)$	154	1,0379723094E-05	$(1,73205\xi_6)(1,73205\xi_7)(1,73205\xi_9)$
116	-1,2007542872E-04	$(1,73205\xi_1)(1,73205\xi_2)(1,73205\xi_3)$	155	-2,3184329151E-05	$(1,73205\xi_6)(1,73205\xi_9)(1,73205\xi_{10})$

Tableau E. 13 : Coefficients du modèle de substitution du déplacement maximal de la console (3/5)

$i$	$a_i^{  U  _0}$	$\Psi_i^{Legendre   U  _0}$	$i$	$a_i^{  U  _0}$	$\Psi_i^{Legendre   U  _0}$
0	1,4768400895E-03	1	37	-6,0658362464E-05	$(1,73205\xi_6)(1,73205\xi_8)$
1	-1,5506091031E-05	$1,73205\xi_0$	38	5,0890481571E-05	$(1,73205\xi_7)(1,73205\xi_8)$
2	1,0823565794E-04	$1,73205\xi_3$	39	-3,4600030546E-05	$(1,73205\xi_8)(1,73205\xi_9)$
3	-1,7765904628E-04	$1,73205\xi_4$	40	7,1091711412E-05	$(1,73205\xi_3)(-1,11803 + 3,3541\xi_4^2)$
4	-9,2069189163E-05	$1,73205\xi_5$	41	-4,8252396853E-05	$(-1,11803 + 3,3541\xi_4^2)(1,73205\xi_5)$
5	6,8692584740E-05	$1,73205\xi_6$	42	4,5196163035E-05	$(-1,11803 + 3,3541\xi_4^2)(1,73205\xi_6)$
6	-5,4372265878E-05	$1,73205\xi_7$	43	-2,2625928540E-05	$(-1,11803 + 3,3541\xi_4^2)(1,73205\xi_7)$
7	-1,2913569422E-04	$1,73205\xi_8$	44	-9,2240232653E-05	$(-1,11803 + 3,3541\xi_4^2)(1,73205\xi_8)$
8	-2,2687798005E-04	$1,73205\xi_9$	45	1,6782781874E-05	$(1,73205\xi_1)(-1,11803 + 3,3541\xi_5^2)$
9	5,7257109589E-05	$1,73205\xi_1$	46	1,9046512438E-05	$(1,73205\xi_3)(-1,11803 + 3,3541\xi_5^2)$
10	2,3347223990E-05	$1,73205\xi_{12}$	47	-2,3354251420E-05	$(1,73205\xi_4)(-1,11803 + 3,3541\xi_5^2)$
11	3,8789364219E-05	$1,73205\xi_{13}$	48	-3,2971401535E-05	$(-1,11803 + 3,3541\xi_5^2)(1,73205\xi_8)$
12	3,3180477191E-05	$-1,11803 + 3,3541\xi_5^2$	49	-2,9919155520E-05	$(1,73205\xi_3)(-3,96863\xi_4 + 6,61438\xi_4^3)$
13	1,2207786314E-04	$-1,11803 + 3,3541\xi_4^2$	50	2,4640887912E-05	$(-3,96863\xi_4 + 6,61438\xi_4^3)(1,73205\xi_8)$
14	3,0409991443E-05	$-1,11803 + 3,3541\xi_5^2$	51	-1,0805163774E-05	$(1,73205\xi_4)(-3,96863\xi_8 + 6,61438\xi_8^3)$
15	4,2719251745E-05	$-1,11803 + 3,3541\xi_8^2$	52	-4,9893494677E-06	$(-1,11803 + 3,3541\xi_4^2)(-1,11803 + 3,3541\xi_8^2)$
16	4,9632859371E-05	$-1,11803 + 3,3541\xi_9^2$	53	6,6146212745E-06	$(-3,96863\xi_4 + 6,61438\xi_4^3)(-1,11803 + 3,3541\xi_8^2)$
17	-5,6391262574E-05	$-3,96863\xi_4 + 6,61438\xi_4^3$	54	-1,4075738370E-05	$(-1,11803 + 3,3541\xi_0^2)(-3,96863\xi_5 + 6,61438\xi_5^3)$
18	-1,7074377619E-05	$-3,96863\xi_5 + 6,61438\xi_5^3$	55	7,6656844185E-06	$(-1,11803 + 3,3541\xi_4^2)(-3,96863\xi_8 + 6,61438\xi_8^3)$
19	1,7686762178E-05	$1,125 - 11,25\xi_4^2 + 13,125\xi_4^4$	56	-2,0024558964E-05	$(1,73205\xi_1)(1,73205\xi_4)(1,73205\xi_8)$
20	1,7174689359E-05	$(1,73205\xi_0)(1,73205\xi_4)$	57	-1,1572954961E-05	$(1,73205\xi_2)(1,73205\xi_4)(1,73205\xi_8)$
21	-1,4028393318E-04	$(1,73205\xi_3)(1,73205\xi_4)$	58	5,2081261567E-05	$(1,73205\xi_3)(1,73205\xi_4)(1,73205\xi_5)$
22	-6,4205730098E-05	$(1,73205\xi_3)(1,73205\xi_5)$	59	-4,7321336986E-05	$(1,73205\xi_3)(1,73205\xi_4)(1,73205\xi_6)$
23	5,2150536120E-05	$(1,73205\xi_3)(1,73205\xi_6)$	60	2,3605601919E-05	$(1,73205\xi_3)(1,73205\xi_4)(1,73205\xi_7)$
24	-4,0280825369E-05	$(1,73205\xi_3)(1,73205\xi_7)$	61	1,0431458132E-04	$(1,73205\xi_3)(1,73205\xi_4)(1,73205\xi_8)$
25	-1,0175855590E-04	$(1,73205\xi_3)(1,73205\xi_8)$	62	5,4951794576E-05	$(1,73205\xi_3)(1,73205\xi_5)(1,73205\xi_8)$
26	3,2425424321E-05	$(1,73205\xi_3)(1,73205\xi_9)$	63	-3,4099330239E-05	$(1,73205\xi_3)(1,73205\xi_6)(1,73205\xi_8)$
27	9,4500900317E-05	$(1,73205\xi_4)(1,73205\xi_5)$	64	2,8083917519E-05	$(1,73205\xi_3)(1,73205\xi_7)(1,73205\xi_8)$
28	-8,4228905624E-05	$(1,73205\xi_4)(1,73205\xi_6)$	65	2,5428206916E-05	$(1,73205\xi_4)(1,73205\xi_5)(1,73205\xi_6)$
29	6,2589038973E-05	$(1,73205\xi_4)(1,73205\xi_7)$	66	-6,9376661170E-05	$(1,73205\xi_4)(1,73205\xi_5)(1,73205\xi_8)$
30	1,5677545954E-04	$(1,73205\xi_4)(1,73205\xi_8)$	67	2,4283322973E-05	$(1,73205\xi_4)(1,73205\xi_6)(1,73205\xi_7)$
31	-4,1319003084E-05	$(1,73205\xi_4)(1,73205\xi_9)$	68	6,3330154739E-05	$(1,73205\xi_4)(1,73205\xi_6)(1,73205\xi_8)$
32	-3,1295568578E-05	$(1,73205\xi_5)(1,73205\xi_6)$	69	-4,5156973150E-05	$(1,73205\xi_4)(1,73205\xi_7)(1,73205\xi_8)$
33	3,0898219700E-05	$(1,73205\xi_5)(1,73205\xi_7)$	70	2,3276369474E-05	$(1,73205\xi_4)(1,73205\xi_8)(1,73205\xi_9)$
34	7,1538036354E-05	$(1,73205\xi_5)(1,73205\xi_8)$	71	2,4464138539E-05	$(1,73205\xi_5)(1,73205\xi_6)(1,73205\xi_8)$
35	-2,3335011498E-05	$(1,73205\xi_5)(1,73205\xi_9)$	72	2,6858080322E-05	$(1,73205\xi_6)(1,73205\xi_7)(1,73205\xi_8)$
36	-3,334718371E-05	$(1,73205\xi_6)(1,73205\xi_7)$	73	-1,1927874112E-05	$(-1,12673 + 23,6614\xi_3^2 - 70,9843\xi_3^4 + 52,0551\xi_3^6)(1,73205\xi_5)$

Tableau E. 14 : Coefficients du modèle de substitution du déplacement maximal de la console (4/5)

$i$	$a_i^{\tau_c}$	$\Psi_i^{Legendre \tau_c}$	$i$	$a_i^{\tau_c}$	$\Psi_i^{Legendre \tau_c}$
0	5,1371532317E+00	1	28	4,2449515347E-02	$(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_4)$
1	5,2058933352E-02	$1.73205\xi_0$	29	2,4403520327E-02	$(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_5)$
2	-7,6193181319E-02	$1.73205\xi_1$	30	-1,3378834713E-02	$(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_6)$
3	-9,4305051903E-02	$1.73205\xi_2$	31	1,0354206444E-02	$(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_7)$
4	4,3983494861E-02	$1.73205\xi_3$	32	-3,1647015775E-02	$(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_5)$
5	3,1245704376E-01	$1.73205\xi_4$	33	1,6103985627E-02	$(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_6)$
6	1,2835094210E-02	$1.73205\xi_5$	34	-1,8308895773E-02	$(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_7)$
7	1,5654960508E-02	$1.73205\xi_6$	35	-2,8862532522E-02	$(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_8)$
8	-7,7946037028E-03	$1.73205\xi_7$	36	-1,2552851378E-02	$(1.73205\xi_5)(1.73205\xi_8)$
9	7,0056995219E-01	$1.73205\xi_8$	37	-8,2832863658E-03	$(-1.11803 + 3.3541\xi_2^2)(1.73205\xi_8)$
10	2,2208426864E-02	$1.73205\xi_9$	38	-7,6449640095E-03	$(-1.11803 + 3.3541\xi_3^2)(1.73205\xi_4)$
11	-1,5713804915E-02	$-1.11803 + 3.3541\xi_0^2$	39	8,4100392612E-03	$(1.73205\xi_2)(-1.11803 + 3.3541\xi_4^2)$
12	-1,6183518161E-02	$-1.11803 + 3.3541\xi_3^2$	40	3,2248704058E-02	$(-1.11803 + 3.3541\xi_4^2)(1.73205\xi_8)$
13	-7,8771294991E-02	$-1.11803 + 3.3541\xi_4^2$	41	-9,0262833394E-03	$(1.73205\xi_1)(-1.11803 + 3.3541\xi_5^2)$
14	-1,1054505893E-02	$-1.11803 + 3.3541\xi_5^2$	42	-1,2355922155E-02	$(1.73205\xi_4)(-1.11803 + 3.3541\xi_5^2)$
15	2,7537062355E-01	$-1.11803 + 3.3541\xi_8^2$	43	-1,1723979474E-02	$(-1.11803 + 3.3541\xi_5^2)(1.73205\xi_8)$
16	1,4513604831E-02	$-3.96863\xi_4 + 6.61438\xi_4^3$	44	-6,0989793245E-03	$(1.73205\xi_0)(-1.11803 + 3.3541\xi_8^2)$
17	-9,8212708411E-03	$-3.96863\xi_5 + 6.61438\xi_5^3$	45	6,9700507356E-03	$(1.73205\xi_2)(-1.11803 + 3.3541\xi_8^2)$
18	1,4934266768E-01	$-3.96863\xi_8 + 6.61438\xi_8^3$	46	1,5783272386E-02	$(1.73205\xi_4)(-1.11803 + 3.3541\xi_8^2)$
19	-2,1684723959E-02	$(1.73205\xi_0)(1.73205\xi_2)$	47	6,3311664607E-03	$(1.73205\xi_0)(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_7)$
20	-8,1041665117E-03	$(1.73205\xi_0)(1.73205\xi_4)$	48	-8,0806103492E-03	$(1.73205\xi_0)(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_7)$
21	1,2249180356E-02	$(1.73205\xi_1)(1.73205\xi_3)$	49	-9,0463638590E-03	$(1.73205\xi_1)(1.73205\xi_2)(1.73205\xi_5)$
22	-1,7758077795E-02	$(1.73205\xi_1)(1.73205\xi_4)$	50	1,2652034154E-02	$(1.73205\xi_1)(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_5)$
23	-9,7198299686E-03	$(1.73205\xi_1)(1.73205\xi_5)$	51	-1,3549833819E-02	$(1.73205\xi_1)(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_5)$
24	9,7924356506E-03	$(1.73205\xi_2)(1.73205\xi_3)$	52	1,3770485685E-02	$(1.73205\xi_2)(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_4)$
25	-7,9149398988E-03	$(1.73205\xi_2)(1.73205\xi_4)$	53	2,1565730454E-02	$(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_5)$
26	-1,1597594195E-02	$(1.73205\xi_2)(1.73205\xi_5)$	54	-1,9046977974E-02	$(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_8)$
27	2,3525416325E-02	$(1.73205\xi_2)(1.73205\xi_8)$	55	-9,2096953523E-03	$(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_5)(1.73205\xi_7)$

Tableau E. 15 : Coefficients du modèle de substitution du déplacement maximal de la console (5/5)

$i$	$a_i^{\tau_L}$	$\Psi_i^{Legendre \tau_L}$	$i$	$a_i^{\tau_L}$	$\Psi_i^{Legendre \tau_L}$
0	6,1420343541E+00	1	22	1,8793605353E-02	$(1.73205\xi_2)(1.73205\xi_8)$
1	6,1609791636E-02	$1.73205\xi_0$	23	1,3017551281E-02	$(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_5)$
2	-2,4737824851E-02	$1.73205\xi_1$	24	9,9890462621E-03	$(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_6)$
3	-2,7419227011E-02	$1.73205\xi_2$	25	-2,1843926484E-02	$(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_5)$
4	-8,8392949678E-02	$1.73205\xi_3$	26	-2,6862647128E-02	$(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_8)$
5	4,0079716488E-01	$1.73205\xi_4$	27	-2,6510395847E-02	$(1.73205\xi_5)(1.73205\xi_8)$
6	7,9544234313E-02	$1.73205\xi_5$	28	-7,0150502049E-03	$(-1.11803 + 3.3541\xi_0^2)(1.73205\xi_4)$
7	-5,2528603713E-02	$1.73205\xi_6$	29	-8,4572212006E-03	$(-1.11803 + 3.3541\xi_0^2)(1.73205\xi_5)$
8	4,5605484816E-02	$1.73205\xi_7$	30	-9,5030312905E-03	$(-1.11803 + 3.3541\xi_4^2)(1.73205\xi_5)$
9	6,6247911180E-01	$1.73205\xi_8$	31	-8,3482881983E-03	$(1.73205\xi_1)(-1.11803 + 3.3541\xi_5^2)$
10	-2,2354868409E-02	$1.73205\xi_9$	32	-1,2287802521E-02	$(1.73205\xi_2)(-1.11803 + 3.3541\xi_5^2)$
11	-1,5791078791E-02	$-1.11803 + 3.3541\xi_0^2$	33	1,0280494927E-02	$(1.73205\xi_3)(-1.11803 + 3.3541\xi_5^2)$
12	1,7998729699E-02	$-1.11803 + 3.3541\xi_3^2$	34	-2,1800797363E-02	$(1.73205\xi_4)(-1.11803 + 3.3541\xi_5^2)$
13	-6,1353975885E-02	$-1.11803 + 3.3541\xi_4^2$	35	-8,4624126236E-03	$(1.73205\xi_0)(-1.11803 + 3.3541\xi_8^2)$
14	-4,8149288599E-02	$-1.11803 + 3.3541\xi_5^2$	36	7,1188476722E-03	$(1.73205\xi_2)(-1.11803 + 3.3541\xi_8^2)$
15	2,6825791290E-01	$-1.11803 + 3.3541\xi_8^2$	37	6,3866846037E-03	$(1.73205\xi_0)(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_7)$
16	1,4422508230E-01	$-3.96863\xi_8 + 6.61438\xi_8^3$	38	5,6948181846E-03	$(1.73205\xi_1)(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_5)$
17	-1,8600168797E-02	$(1.73205\xi_0)(1.73205\xi_2)$	39	-1,1399279085E-02	$(1.73205\xi_1)(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_5)$
18	1,3354096437E-02	$(1.73205\xi_0)(1.73205\xi_5)$	40	8,4659425351E-03	$(1.73205\xi_2)(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_4)$
19	-1,1781928795E-02	$(1.73205\xi_1)(1.73205\xi_5)$	41	1,3801038597E-02	$(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_5)$
20	-9,5179737613E-03	$(1.73205\xi_1)(1.73205\xi_8)$	42	-8,5677644231E-03	$(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_5)(1.73205\xi_7)$
21	8,8832499398E-03	$(1.73205\xi_2)(1.73205\xi_5)$	43	-9,0821304180E-03	$(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_5)(1.73205\xi_8)$

### E.6. Coefficients du model de substitution du déplacement maximal en x de la rainure

Tableau E. 16 : Coefficients du modèle de substitution de Uxmax de la rainure (1/6)

$i$	$a_i^{\ U\ _{Max}}$	$\Psi_i^{Legendre \ U\ _{Max}}$	$i$	$a_i^{\ U\ _{Max}}$	$\Psi_i^{Legendre \ U\ _{Max}}$
0	3,0228187075E-03	1	36	1,6123629993E-05	$(1,73205\xi_3)(1,73205\xi_{13})$
1	1,5712366575E-05	$1,73205\xi_0$	37	-3,7232815392E-05	$(1,73205\xi_4)(1,73205\xi_5)$
2	-1,3326221440E-04	$1,73205\xi_1$	38	-3,7545899495E-05	$(1,73205\xi_4)(1,73205\xi_6)$
3	-1,2966928154E-04	$1,73205\xi_2$	39	3,2441416846E-05	$(1,73205\xi_4)(1,73205\xi_7)$
4	5,3175771478E-04	$1,73205\xi_3$	40	-2,2991760931E-05	$(1,73205\xi_4)(1,73205\xi_9)$
5	-2,2041334059E-04	$1,73205\xi_4$	41	-5,2314371847E-05	$(1,73205\xi_5)(1,73205\xi_6)$
6	-2,9002161437E-04	$1,73205\xi_5$	42	3,8356886173E-05	$(1,73205\xi_5)(1,73205\xi_7)$
7	3,0174754673E-04	$1,73205\xi_6$	43	-2,9947737050E-05	$(1,73205\xi_5)(1,73205\xi_9)$
8	-2,7097981323E-04	$1,73205\xi_7$	44	-6,4761637488E-05	$(1,73205\xi_6)(1,73205\xi_7)$
9	4,2366154074E-05	$1,73205\xi_8$	45	2,9346392885E-05	$(1,73205\xi_6)(1,73205\xi_9)$
10	-2,8046917412E-04	$1,73205\xi_9$	46	-2,4576955201E-05	$(1,73205\xi_7)(1,73205\xi_9)$
11	1,7953542652E-04	$1,73205\xi_{11}$	47	-3,8495858322E-05	$(1,73205\xi_9)(1,73205\xi_{11})$
12	1,1107289617E-04	$1,73205\xi_{12}$	48	-2,3151396957E-05	$(1,73205\xi_9)(1,73205\xi_{12})$
13	-1,6267050572E-04	$1,73205\xi_{13}$	49	3,5583128889E-05	$(1,73205\xi_9)(1,73205\xi_{13})$
14	6,0428062585E-05	$-1,11803 + 3,3541\xi_3^2$	50	-1,8011424834E-05	$(1,73205\xi_{11})(1,73205\xi_{13})$
15	2,3691882149E-05	$-1,11803 + 3,3541\xi_4^2$	51	-1,5919674141E-05	$(1,73205\xi_{12})(1,73205\xi_{13})$
16	4,8100963882E-05	$-1,11803 + 3,3541\xi_5^2$	52	1,8711244361E-05	$(-1,11803 + 3,3541\xi_3^2)(1,73205\xi_6)$
17	1,7456895338E-05	$-1,11803 + 3,3541\xi_6^2$	53	-1,4939946510E-05	$(-1,11803 + 3,3541\xi_3^2)(1,73205\xi_7)$
18	4,4420281653E-05	$-1,11803 + 3,3541\xi_7^2$	54	7,6474108882E-06	$(-1,11803 + 3,3541\xi_3^2)(1,73205\xi_9)$
19	6,5150335929E-05	$-1,11803 + 3,3541\xi_9^2$	55	2,3305592982E-05	$(-1,11803 + 3,3541\xi_4^2)(1,73205\xi_5)$
20	1,4040274590E-05	$(1,73205\xi_0)(1,73205\xi_3)$	56	1,7089584883E-05	$(1,73205\xi_1)(-1,11803 + 3,3541\xi_5^2)$
21	-1,6717134304E-05	$(1,73205\xi_0)(1,73205\xi_5)$	57	1,3555454634E-05	$(1,73205\xi_2)(-1,11803 + 3,3541\xi_5^2)$
22	-9,5467787694E-06	$(1,73205\xi_1)(1,73205\xi_2)$	58	3,6120652545E-05	$(1,73205\xi_4)(-1,11803 + 3,3541\xi_5^2)$
23	-4,5183875647E-05	$(1,73205\xi_1)(1,73205\xi_3)$	59	1,4216108046E-05	$(1,73205\xi_3)(-1,11803 + 3,3541\xi_7^2)$
24	-2,6769114711E-05	$(1,73205\xi_1)(1,73205\xi_6)$	60	-1,2881676660E-05	$(1,73205\xi_1)(1,73205\xi_3)(1,73205\xi_5)$
25	1,8081318970E-05	$(1,73205\xi_1)(1,73205\xi_7)$	61	2,1856361173E-05	$(1,73205\xi_1)(1,73205\xi_4)(1,73205\xi_5)$
26	-1,2345113406E-05	$(1,73205\xi_1)(1,73205\xi_9)$	62	1,2089240004E-05	$(1,73205\xi_2)(1,73205\xi_5)(1,73205\xi_7)$
27	-3,5310625434E-05	$(1,73205\xi_2)(1,73205\xi_3)$	63	-2,5221046581E-05	$(1,73205\xi_3)(1,73205\xi_4)(1,73205\xi_5)$
28	-1,5036602289E-05	$(1,73205\xi_2)(1,73205\xi_4)$	64	-1,6825867528E-05	$(1,73205\xi_3)(1,73205\xi_4)(1,73205\xi_6)$
29	-4,1239818883E-05	$(1,73205\xi_2)(1,73205\xi_5)$	65	-1,5832064601E-05	$(1,73205\xi_3)(1,73205\xi_5)(1,73205\xi_6)$
30	1,6340171867E-05	$(1,73205\xi_2)(1,73205\xi_7)$	66	-1,1879170882E-05	$(1,73205\xi_3)(1,73205\xi_5)(1,73205\xi_8)$
31	-7,4881772189E-05	$(1,73205\xi_3)(1,73205\xi_4)$	67	-1,7747383368E-05	$(1,73205\xi_3)(1,73205\xi_5)(1,73205\xi_9)$
32	-1,0082789068E-04	$(1,73205\xi_3)(1,73205\xi_5)$	68	-2,8160936636E-05	$(1,73205\xi_3)(1,73205\xi_6)(1,73205\xi_7)$
33	1,4194822048E-04	$(1,73205\xi_3)(1,73205\xi_6)$	69	1,3597728325E-05	$(1,73205\xi_3)(1,73205\xi_6)(1,73205\xi_9)$
34	-1,2416049290E-04	$(1,73205\xi_3)(1,73205\xi_7)$	70	-1,8319761134E-05	$(1,73205\xi_4)(1,73205\xi_5)(1,73205\xi_6)$
35	5,7245712847E-05	$(1,73205\xi_3)(1,73205\xi_9)$	71	2,1107095444E-05	$(1,73205\xi_4)(1,73205\xi_5)(1,73205\xi_7)$

Tableau E. 17 : Coefficients du modèle de substitution de  $U_{x\max}$  de la rainure (2/6)

$i$	$a_i^{\ U\ _0}$	$\Psi_i^{\text{Legendre } \ U\ _0}$
0	1,706183333E-03	1
1	2,5673864239E-05	$1,73205\xi_3$
2	-3,8181632459E-05	$1,73205\xi_4$
3	-1,8864192021E-05	$1,73205\xi_5$
4	1,3686107694E-05	$1,73205\xi_6$
5	-1,1934941174E-05	$1,73205\xi_7$
6	-3,2835215248E-05	$1,73205\xi_8$
7	-3,2698187339E-04	$1,73205\xi_9$
8	1,1236395404E-04	$1,73205\xi_{11}$
9	8,7318010380E-05	$1,73205\xi_{12}$
10	-8,1816894809E-05	$1,73205\xi_{13}$
11	1,4658092067E-05	$-1,11803 + 3,3541\xi_4^2$
12	6,1322922243E-06	$-1,11803 + 3,3541\xi_5^2$
13	5,8389455846E-05	$-1,11803 + 3,3541\xi_9^2$
14	-6,1295087724E-06	$-1,11803 + 3,3541\xi_{12}^2$
15	-5,3171479937E-06	$-3,96863\xi_4 + 6,61438\xi_4^3$
16	-9,5083069407E-06	$-3,96863\xi_9 + 6,61438\xi_9^3$
17	4,6688485159E-06	$1,125 - 11,25\xi_8^2 + 13,125\xi_8^4$
18	-4,5710781013E-06	$(1,73205\xi_2)(1,73205\xi_5)$
19	-1,4238685373E-05	$(1,73205\xi_3)(1,73205\xi_4)$
20	-6,9498654253E-06	$(1,73205\xi_3)(1,73205\xi_5)$
21	5,0988820619E-06	$(1,73205\xi_3)(1,73205\xi_6)$
22	-1,4736492093E-05	$(1,73205\xi_3)(1,73205\xi_8)$
23	1,0488607374E-05	$(1,73205\xi_4)(1,73205\xi_5)$
24	-7,8583016559E-06	$(1,73205\xi_4)(1,73205\xi_6)$
25	6,6741255960E-06	$(1,73205\xi_4)(1,73205\xi_7)$
26	2,2069235163E-05	$(1,73205\xi_4)(1,73205\xi_8)$
27	-4,2723417009E-06	$(1,73205\xi_4)(1,73205\xi_{11})$
28	1,2378225093E-05	$(1,73205\xi_5)(1,73205\xi_8)$
29	-7,6202817141E-06	$(1,73205\xi_6)(1,73205\xi_8)$
30	6,6385310740E-06	$(1,73205\xi_7)(1,73205\xi_8)$
31	-2,0887284372E-05	$(1,73205\xi_9)(1,73205\xi_{11})$
32	-1,7360498215E-05	$(1,73205\xi_9)(1,73205\xi_{12})$
33	1,4147855663E-05	$(1,73205\xi_9)(1,73205\xi_{13})$
34	3,0706737887E-06	$(1,73205\xi_{11})(1,73205\xi_{12})$
35	9,7863795673E-06	$(1,73205\xi_{12})(1,73205\xi_{13})$
36	4,7056961051E-06	$(1,73205\xi_3)(-1,11803 + 3,3541\xi_4^2)$
37	-8,9258953029E-06	$(-1,11803 + 3,3541\xi_4^2)(1,73205\xi_8)$
38	-3,8576889433E-06	$(1,73205\xi_4)(1,125 - 11,25\xi_8^2 + 13,125\xi_8^4)$
39	9,0457655720E-06	$(1,73205\xi_3)(1,73205\xi_4)(1,73205\xi_8)$
40	4,1506164134E-06	$(1,73205\xi_3)(1,73205\xi_5)(1,73205\xi_8)$
41	-6,0356391374E-06	$(1,73205\xi_4)(1,73205\xi_5)(1,73205\xi_8)$

Tableau E. 18 : Coefficients du modèle de substitution de Uxmax de la rainure (3/6)

$i$	$a_i^{\tau c}$	$\Psi_i^{Legendre \tau c}$	$i$	$a_i^{\tau c}$	$\Psi_i^{Legendre \tau c}$
0	5,18013535E+00	1	22	2,39825677E-02	$(-1.11803 + 3.3541\xi_3^2)(1.73205\xi_7)$
1	6,75356885E-02	$1.73205\xi_0$	23	-2,76353711E-02	$(-1.11803 + 3.3541\xi_3^2)(1.73205\xi_9)$
2	-7,35233149E-02	$1.73205\xi_1$	24	-2,32761380E-02	$(-1.11803 + 3.3541\xi_3^2)(1.73205\xi_{13})$
3	-8,25388810E-02	$1.73205\xi_2$	25	4,51936531E-02	$(-1.11803 + 3.3541\xi_4^2)(1.73205\xi_8)$
4	4,17323238E-02	$1.73205\xi_3$	26	3,08932417E-02	$(1.73205\xi_4)(-1.11803 + 3.3541\xi_8^2)$
5	3,59227674E-01	$1.73205\xi_4$	27	-1,87473585E-02	$(1.73205\xi_5)(-1.11803 + 3.3541\xi_9^2)$
6	3,37293865E-02	$1.73205\xi_5$	28	-2,50564421E-02	$(1.73205\xi_4)(-3.96863\xi_8 + 6.61438\xi_8^3)$
7	7,11216101E-01	$1.73205\xi_8$	29	1,48615846E-02	$15.2383\xi_5 - 457.15\xi_5^3 + 3885.77\xi_5^5 - 14062.8\xi_5^7 + 24609.9\xi_5^9 - 20582.8\xi_5^{11} + 6597.06\xi_5^{13}$
8	4,05539887E-02	$1.73205\xi_9$	30	-1,75627656E-02	$(-3.96863\xi_0 + 6.61438\xi_0^3)(-1.11803 + 3.3541\xi_{10}^2)$
9	-2,16000726E-02	$1.73205\xi_{11}$	31	-1,79508421E-02	$(-3.96863\xi_8 + 6.61438\xi_8^3)(-1.11803 + 3.3541\xi_9^2)$
10	-3,30708623E-02	$1.73205\xi_{12}$	32	-1,99262604E-02	$(1.73205\xi_0)(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_6)$
11	3,97541295E-02	$1.73205\xi_{13}$	33	1,70761624E-02	$(1.73205\xi_1)(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_6)$
12	-8,89585291E-02	$-1.11803 + 3.3541\xi_4^2$	34	2,08976731E-02	$(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_9)$
13	2,60831709E-01	$-1.11803 + 3.3541\xi_8^2$	35	2,88680850E-02	$(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_5)(1.73205\xi_6)$
14	1,41322073E-01	$-3.96863\xi_8 + 6.61438\xi_8^3$	36	-2,20779934E-02	$(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_5)(1.73205\xi_7)$
15	1,87037603E-02	$1.125 - 11.25\xi_3^2 + 13.125\xi_3^4$	37	3,11161240E-02	$(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_5)(1.73205\xi_9)$
16	3,30038473E-02	$(1.73205\xi_2)(1.73205\xi_8)$	38	3,13416749E-02	$(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_5)(1.73205\xi_{13})$
17	-5,87501582E-02	$(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_8)$	39	3,35517516E-02	$(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_6)(1.73205\xi_7)$
18	-3,37846562E-02	$(1.73205\xi_5)(1.73205\xi_8)$	40	-3,05621385E-02	$(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_6)(1.73205\xi_9)$
19	-1,97478120E-02	$(1.73205\xi_{11})(1.73205\xi_{12})$	41	-2,43620833E-02	$(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_6)(1.73205\xi_{13})$
20	2,08218052E-02	$(-1.11803 + 3.3541\xi_3^2)(1.73205\xi_4)$	42	2,55526590E-02	$(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_7)(1.73205\xi_9)$
21	2,14094023E-02	$(-1.11803 + 3.3541\xi_3^2)(1.73205\xi_5)$	43	-2,53270080E-02	$(1.73205\xi_6)(1.73205\xi_7)(1.73205\xi_{11})$



Tableau E. 19 : Coefficients du modèle de substitution de Uxmax de la rainure (4/6)

$i$	$a_i^{\tau_L}$	$\Psi_i^{Legendre \tau_L}$	$i$	$a_i^{\tau_L}$	$\Psi_i^{Legendre \tau_L}$
0	5,8396211865E+00	1	33	6,6511964879E-02	$(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_9)$
1	6,0087325590E-02	$1.73205\xi_0$	34	-2,2289210014E-02	$(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_{11})$
2	-2,7743746569E-02	$1.73205\xi_1$	35	1,6974889057E-02	$(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_{12})$
3	-2,4712330912E-02	$1.73205\xi_2$	36	3,1474766735E-02	$(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_{13})$
4	-2,4589747672E-02	$1.73205\xi_3$	37	-3,3238240616E-02	$(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_5)$
5	3,3066597460E-01	$1.73205\xi_4$	38	-1,1231041486E-02	$(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_6)$
6	2,6161875537E-02	$1.73205\xi_5$	39	1,7785146429E-02	$(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_7)$
7	6,1396060048E-01	$1.73205\xi_8$	40	-3,3421017010E-02	$(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_9)$
8	-3,4076298301E-02	$1.73205\xi_{11}$	41	-1,7109750966E-02	$(1.73205\xi_5)(1.73205\xi_8)$
9	-3,6398494109E-02	$1.73205\xi_{12}$	42	-3,6075509982E-02	$(1.73205\xi_5)(1.73205\xi_9)$
10	6,8125246283E-02	$1.73205\xi_{13}$	43	-2,2991484137E-02	$(1.73205\xi_5)(1.73205\xi_{13})$
11	3,6316669096E-02	$-1.11803 + 3.3541\xi_3^2$	44	-1,9827260441E-02	$(1.73205\xi_6)(1.73205\xi_7)$
12	-3,8029696060E-02	$-1.11803 + 3.3541\xi_4^2$	45	2,6519129527E-02	$(1.73205\xi_6)(1.73205\xi_9)$
13	-3,8952422188E-02	$-1.11803 + 3.3541\xi_5^2$	46	-1,5775400909E-02	$(1.73205\xi_7)(1.73205\xi_9)$
14	1,8372443869E-02	$-1.11803 + 3.3541\xi_6^2$	47	1,3855431212E-02	$(1.73205\xi_{11})(1.73205\xi_{12})$
15	1,2452592268E-02	$-1.11803 + 3.3541\xi_7^2$	48	-1,6253887876E-02	$-1.12673 + 23.6614\xi_6^2 - 70.9843\xi_6^4 + 52.0551\xi_6^6$
16	2,7150838465E-01	$-1.11803 + 3.3541\xi_8^2$	49	-1,6215610274E-02	$-8.47215\xi_5 + 76.2494\xi_5^3 - 167.749\xi_5^5 + 103.844\xi_5^7$
17	1,4287707701E-02	$-1.11803 + 3.3541\xi_9^2$	50	1,7428330380E-02	$(-1.11803 + 3.3541\xi_2^2)(1.73205\xi_9)$
18	1,7245842823E-02	$-1.11803 + 3.3541\xi_{13}^2$	51	-1,9641871223E-02	$(-1.11803 + 3.3541\xi_2^2)(1.73205\xi_5)$
19	1,5480076791E-01	$-3.96863\xi_8 + 6.61438\xi_8^3$	52	1,2452386236E-02	$(-1.11803 + 3.3541\xi_4^2)(1.73205\xi_{12})$
20	1,2016816900E-02	$6.21867\xi_5 - 29.0205\xi_5^3 + 26.1184\xi_5^5$	53	2,5643425186E-02	$(1.73205\xi_3)(-1.11803 + 3.3541\xi_5^2)$
21	-2,1385572808E-02	$(1.73205\xi_0)(1.73205\xi_2)$	54	-2,1319886019E-02	$(1.73205\xi_4)(-1.11803 + 3.3541\xi_5^2)$
22	-2,4526172939E-02	$(1.73205\xi_1)(1.73205\xi_3)$	55	1,5724608694E-02	$(-1.11803 + 3.3541\xi_7^2)(1.73205\xi_{12})$
23	-1,7826705045E-02	$(1.73205\xi_1)(1.73205\xi_8)$	56	1,3965135918E-02	$(-3.96863\xi_0 + 6.61438\xi_0^3)(1.73205\xi_{12})$
24	-1,2591320315E-02	$(1.73205\xi_1)(1.73205\xi_{10})$	57	-1,3383841127E-02	$(-3.96863\xi_1 + 6.61438\xi_1^3)(1.73205\xi_7)$
25	1,1249594786E-02	$(1.73205\xi_1)(1.73205\xi_{11})$	58	-1,2435849176E-02	$(-3.96863\xi_5 + 6.61438\xi_5^3)(1.73205\xi_6)$
26	-1,7593669495E-02	$(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_3)$	59	1,2022229085E-02	$(-3.96863\xi_5 + 6.61438\xi_5^3)(1.73205\xi_7)$
27	2,2714157540E-02	$(1.73205\xi_2)(1.73205\xi_8)$	60	1,2290116799E-02	$(-3.96863\xi_7 + 6.61438\xi_7^3)(1.73205\xi_8)$
28	-4,9802775631E-02	$(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_4)$	61	-1,8794889089E-02	$-12.9825\xi_6 + 281.287\xi_6^3 - 1687.72\xi_6^5 + 4098.75\xi_6^7 - 4326.46\xi_6^9 + 1651.92\xi_6^{11}$
29	-2,7037977989E-02	$(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_5)$	62	-2,0366039147E-02	$(-1.11803 + 3.3541\xi_4^2)(-1.11803 + 3.3541\xi_8^2)$
30	6,0707222273E-02	$(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_6)$	63	1,2394466738E-02	$(-1.11803 + 3.3541\xi_5^2)(-1.11803 + 3.3541\xi_8^2)$
31	-3,8018103422E-02	$(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_7)$	64	1,9833219045E-02	$(1.125 - 11.25\xi_8^2 + 13.125\xi_8^4)(1.73205\xi_9)$
32	1,2583960627E-02	$(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_8)$	65	1,4788310785E-02	$(1.73205\xi_8)(1.125 - 11.25\xi_{10}^2 + 13.125\xi_{10}^4)$

Tableau E. 20 : Coefficients du modèle de substitution de Uxmax de la rainure (5/6)

$i$	$a_i^{\tau_L}$	$\Psi_i^{Legendre \tau_L}$	$i$	$a_i^{\tau_L}$	$\Psi_i^{Legendre \tau_L}$
66	1,5259762399E-02	$(1.73205\xi_{10})(1.125 - 11.25\xi_{13}^2 + 13.125\xi_{13}^4)$	86	1,3477957419E-02	$(1.73205\xi_2)(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_4)$
67	-1,3133179581E-02	$(-3.96863\xi_0 + 6.61438\xi_0^3)(-1.11803 + 3.3541\xi_4^2)$	87	-2,3725584969E-02	$(1.73205\xi_2)(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_9)$
68	-1,8156015916E-02	$(-3.96863\xi_0 + 6.61438\xi_0^3)(-1.11803 + 3.3541\xi_8^2)$	88	-1,3984640185E-02	$(1.73205\xi_2)(1.73205\xi_8)(1.73205\xi_9)$
69	-1,5735321971E-02	$(-3.96863\xi_2 + 6.61438\xi_2^3)(-1.11803 + 3.3541\xi_{12}^2)$	89	1,7709402786E-02	$(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_5)$
70	1,6916202905E-02	$(-3.96863\xi_3 + 6.61438\xi_3^3)(-1.11803 + 3.3541\xi_{13}^2)$	90	-1,8397746226E-02	$(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_8)$
71	1,7433882574E-02	$(-1.11803 + 3.3541\xi_4^2)(-3.96863\xi_6 + 6.61438\xi_6^3)$	91	-1,6062882917E-02	$(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_5)(1.73205\xi_{12})$
72	-9,6644707754E-03	$(-3.96863\xi_6 + 6.61438\xi_6^3)(-1.11803 + 3.3541\xi_{10}^2)$	92	2,2157146897E-02	$(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_8)(1.73205\xi_9)$
73	-1,7378006255E-02	$(-1.11803 + 3.3541\xi_6^2)(-3.96863\xi_8 + 6.61438\xi_8^3)$	93	-1,6309316794E-02	$(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_3)(1.73205\xi_8)$
74	-1,5822388888E-02	$(-1.11803 + 3.3541\xi_7^2)(-3.96863\xi_9 + 6.61438\xi_9^3)$	94	1,8779618799E-02	$(1.73205\xi_6)(1.73205\xi_7)(1.73205\xi_{11})$
75	-2,0687124256E-02	$-1.12804 + 118.445\xi_3^2 - 2013.56\xi_3^4 + 12752.5\xi_3^6 - 38257.6\xi_3^8 + 58661.7\xi_3^{10} - 44440.7\xi_3^{12} + 13185.7\xi_3^{14}$	95	8,9778465779E-03	$(1.73205\xi_6)(1.73205\xi_{10})(1.73205\xi_{11})$
76	1,9692249458E-02	$(6.21867\xi_3 - 29.0205\xi_3^3 + 26.1184\xi_3^5)(1.73205\xi_8)$	96	9,4552521126E-03	$(1.73205\xi_6)(1.73205\xi_{11})(1.73205\xi_{13})$
77	-2,2184859031E-02	$(6.21867\xi_3 - 29.0205\xi_3^3 + 26.1184\xi_3^5)(1.73205\xi_{11})$	97	-9,4722481975E-03	$(1.73205\xi_8)(1.73205\xi_9)(1.73205\xi_{10})$
78	1,1531394716E-02	$(1.73205\xi_0)(6.21867\xi_6 - 29.0205\xi_6^3 + 26.1184\xi_6^5)$	98	-2,2001816525E-02	$(-1.12673 + 23.6614\xi_0^2 - 70.9843\xi_0^4 + 52.0551\xi_0^6)(1.73205\xi_9)$
79	1,4171473724E-02	$(6.21867\xi_7 - 29.0205\xi_7^3 + 26.1184\xi_7^5)(1.73205\xi_{11})$	99	-1,6304889193E-02	$(-1.12673 + 23.6614\xi_0^2 - 70.9843\xi_0^4 + 52.0551\xi_0^6)(1.73205\xi_{12})$
80	1,1473176210E-02	$(1.73205\xi_3)(6.21867\xi_{12} - 29.0205\xi_{12}^3 + 26.1184\xi_{12}^5)$	100	-1,5219740504E-02	$(-1.12673 + 23.6614\xi_3^2 - 70.9843\xi_3^4 + 52.0551\xi_3^6)(1.73205\xi_7)$
81	1,6808579614E-02	$-17.4944\xi_9 + 693.945\xi_9^3 - 7910.97\xi_9^5 + 39554.9\xi_9^7 - 101085\xi_9^9 + 137843\xi_9^{11} - 95429.6\xi_9^{13} + 26356.7\xi_9^{15}$	101	-1,5286858535E-02	$(-1.12673 + 23.6614\xi_3^2 - 70.9843\xi_3^4 + 52.0551\xi_3^6)(1.73205\xi_{12})$
82	-1,4774273100E-02	$(1.73205\xi_0)(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_8)$	102	1,6213921493E-02	$(1.73205\xi_2)(-1.12673 + 23.6614\xi_6^2 - 70.9843\xi_6^4 + 52.0551\xi_6^6)$
83	-1,7120658607E-02	$(1.73205\xi_0)(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_{12})$	103	1,2686491657E-02	$(1.73205\xi_3)(-1.12673 + 23.6614\xi_6^2 - 70.9843\xi_6^4 + 52.0551\xi_6^6)$
84	-1,9405717373E-02	$(1.73205\xi_1)(1.73205\xi_4)(1.73205\xi_5)$	104	-1,4736628491E-02	$(-1.12673 + 23.6614\xi_6^2 - 70.9843\xi_6^4 + 52.0551\xi_6^6)(1.73205\xi_{12})$
85	1,3544907720E-02	$(1.73205\xi_1)(1.73205\xi_7)(1.73205\xi_9)$	105	1,8480505431E-02	$(-1.12673 + 23.6614\xi_8^2 - 70.9843\xi_8^4 + 52.0551\xi_8^6)(1.73205\xi_{13})$

Tableau E. 21 : Coefficients du modèle de substitution de Uxmax de la rainure (6/6)

$i$	$a_i^{TL}$	$\Psi_i^{Legendre \tau_L}$
106	1,7849398345E-02	$(1.125 - 11.25\xi_0^2 + 13.125\xi_0^4)(-1.11803 + 3.3541\xi_{13}^2)$
107	-1,5104321449E-02	$(-1.11803 + 3.3541\xi_4^2)(1.125 - 11.25\xi_5^2 + 13.125\xi_5^4)$
108	-1,0876005232E-02	$(1.125 - 11.25\xi_9^2 + 13.125\xi_9^4)(-1.11803 + 3.3541\xi_{10}^2)$
109	-1,4818057141E-02	$(-1.11803 + 3.3541\xi_4^2)(1.125 - 11.25\xi_{12}^2 + 13.125\xi_{12}^4)$
110	1,3339196298E-02	$(-3.96863\xi_3 + 6.61438\xi_3^3)(-3.96863\xi_5 + 6.61438\xi_5^3)$
111	1,7831317009E-02	$(-3.96863\xi_4 + 6.61438\xi_4^3)(-3.96863\xi_6 + 6.61438\xi_6^3)$
112	1,5441637055E-02	$(-3.96863\xi_6 + 6.61438\xi_6^3)(-3.96863\xi_{11} + 6.61438\xi_{11}^3)$
113	1,1326941335E-02	$-1.12817 + 192.918\xi_{11}^2 - 5401.69\xi_{11}^4 + 57978.2\xi_{11}^6 - 310597\xi_{11}^8 + 931792\xi_{11}^{10} - 1.6377e+006\xi_{11}^{12} + 1.67369e+006\xi_{11}^{14} - 920529\xi_{11}^{16} + 210579\xi_{11}^{18}$
114	-1,1844530143E-02	$(1.73205\xi_0)(-8.47215\xi_5 + 76.2494\xi_5^3 - 167.749\xi_5^5 + 103.844\xi_5^7)$
115	-1,3341850954E-02	$(1.73205\xi_4)(-8.47215\xi_5 + 76.2494\xi_5^3 - 167.749\xi_5^5 + 103.844\xi_5^7)$
116	1,1544855239E-02	$(-8.47215\xi_6 + 76.2494\xi_6^3 - 167.749\xi_6^5 + 103.844\xi_6^7)(1.73205\xi_9)$
117	-1,2283829292E-02	$(1.73205\xi_4)(-8.47215\xi_8 + 76.2494\xi_8^3 - 167.749\xi_8^5 + 103.844\xi_8^7)$
118	-1,0079427430E-02	$(-8.47215\xi_8 + 76.2494\xi_8^3 - 167.749\xi_8^5 + 103.844\xi_8^7)(1.73205\xi_{11})$
119	-1,1360190433E-02	$(1.73205\xi_8)(-8.47215\xi_{12} + 76.2494\xi_{12}^3 - 167.749\xi_{12}^5 + 103.844\xi_{12}^7)$
120	1,4683122191E-02	$(1.73205\xi_0)(-8.47215\xi_{13} + 76.2494\xi_{13}^3 - 167.749\xi_{13}^5 + 103.844\xi_{13}^7)$
121	-2,0782479420E-02	$(6.21867\xi_1 - 29.0205\xi_1^3 + 26.1184\xi_1^5)(-1.11803 + 3.3541\xi_{11}^2)$
122	-2,0233603542E-02	$(6.21867\xi_2 - 29.0205\xi_2^3 + 26.1184\xi_2^5)(-1.11803 + 3.3541\xi_7^2)$
123	1,4873606708E-02	$(-1.11803 + 3.3541\xi_5^2)(6.21867\xi_9 - 29.0205\xi_9^3 + 26.1184\xi_9^5)$
124	-1,6543273682E-02	$-22.007\xi_{10} + 1386.44\xi_{10}^3 - 25510.5\xi_{10}^5 + 212588\xi_{10}^7 - 956644\xi_{10}^9 + 2.52206e+006\xi_{10}^{11} - 4.00943e+006\xi_{10}^{13} + 3.78032e+006\xi_{10}^{15} - 1.94575e+006\xi_{10}^{17} + 421011\xi_{10}^{19}$
125	1,3309097799E-02	$(1.125 - 11.25\xi_2^2 + 13.125\xi_2^4)(-3.96863\xi_7 + 6.61438\xi_7^3)$
126	-1,9248142271E-02	$(1.125 - 11.25\xi_6^2 + 13.125\xi_6^4)(-3.96863\xi_8 + 6.61438\xi_8^3)$
127	8,8710611834E-03	$(1.125 - 11.25\xi_6^2 + 13.125\xi_6^4)(-3.96863\xi_{10} + 6.61438\xi_{10}^3)$
128	1,4376458131E-02	$(1.12741 - 40.5868\xi_3^2 + 223.228\xi_3^4 - 386.928\xi_3^6 + 207.283\xi_3^8)(1.73205\xi_8)$
129	1,5149879147E-02	$(1.73205\xi_4)(1.12741 - 40.5868\xi_{13}^2 + 223.228\xi_{13}^4 - 386.928\xi_{13}^6 + 207.283\xi_{13}^8)$
130	1,1518654954E-02	$(-1.11803 + 3.3541\xi_0^2)(1.73205\xi_2)(1.73205\xi_8)$

Auteur : FTATSI MBETMI Guy-de -patience

Directeurs de Thèse : Pr. Frédéric DUPRAT / Pr. Tibi BEDA

Thèse en Génie civil soutenu le vendredi 31 Août 2018 à Toulouse

Titre : Fiabilité résiduelle des ouvrages en béton dégradés par réaction alcali-granulat : Application au barrage hydroélectrique de Song Loulou.

Résumé :

Ce travail de thèse propose une méthodologie multi-échelle basée sur l'utilisation de modèles de substitution fonction de variables aléatoires, pour évaluer la fiabilité résiduelle d'ouvrages en béton atteints de réaction alcali-granulat (RAG), dans l'optique d'une meilleure maintenance. Les modèles de substitution, basés sur des développements en chaos de polynômes des paramètres d'une fonction de forme (sigmoïde dans les cas traités), ont été constitués à plusieurs échelles, afin notamment de réduire les temps de calculs des modèles physiques sous-jacents. A l'échelle microscopique, le modèle de RAG employé est celui développé par Multon, Sellier et Cyr en 2009, comprenant initialement une vingtaine de variables aléatoires potentielles. A l'issue d'une analyse de sensibilité de Morris, le modèle de substitution permet de reproduire la courbe de gonflement dans le temps du volume élémentaire représentatif en fonction de neuf variables aléatoires. L'utilisation du modèle de substitution construit, pour la prédiction des effets mécaniques du gonflement dû à la RAG sur une éprouvette, a nécessité de prendre en compte l'anisotropie de ces effets en améliorant les fonctions poids proposées par Saouma et Perotti en 2006. L'échelle de l'éprouvette étant validée par la confrontation des prédictions aux données expérimentales des travaux de thèse de Multon, une application à l'échelle du barrage de Song Loulou a été entreprise. Le calcul du comportement thermo-chemo-mécanique d'une pile d'évacuateur de crues, dont les résultats en déplacements ont pu être confrontés aux données d'auscultation fournies par l'entreprise AES-SONEL (devenue ENEO), a été réalisé. Des modèles de substitution ont été construits ensuite à l'échelle de la structure afin d'obtenir les déplacements aux points d'intérêt, liés aux états limites de fonctionnement des évacuateurs, et procéder ainsi à l'estimation de la fiabilité résiduelle du barrage. Les calculs d'analyse de sensibilité et la construction des modèles de substitution ont été implémentés en Fortran, Java et OpenTURNS. Les calculs sur éprouvette et pile de barrage ont été effectués sous Cast3M.

Mots clés : Réaction alcali-granulat, Analyse de sensibilité, Modèle de substitution (Métamodèle), Anisotropie, Barrage, Fiabilité.

Title: Residual reliability of alkali-aggregate reaction affected concrete structures: Application to the Song Loulou hydroelectric dam.

Abstract:

This work proposes a multi-scale methodology based on the use of surrogate models function of random variables, to evaluate the residual reliability of concrete structures suffering from alkali-aggregate reaction (AAR), for a better maintenance purpose. Surrogate models, based on polynomial chaos expansion of the parameters of a shape function (sigmoid in the studied cases), have been constituted at several scales, in particular in order to reduce computation time of the underlying physical models. At the microscopic scale, the AAR model employed is that developed by Multon, Sellier and Cyr in 2009, initially comprising about twenty potential random variables. At the end of a Morris sensitivity analysis, the surrogate model enables to reproduce the expansion curve over time of the representative elementary volume as a function of nine random variables. The use of the built-in surrogate model in predicting the mechanical effects of AAR expansion on a concrete core required to take into account the anisotropy of these effects by improving the weight functions proposed by Saouma and Perotti in 2006. The core's scale being validated by the comparison of the predictions with the experimental data of Multon's thesis work, an application at the scale of the Song Loulou dam was undertaken. The computation of the thermo-chemo-mechanical behavior of a spillway stack, whose results in displacement could be compared with the auscultation data provided by the company AES-SONEL (now ENEO), was realized. Surrogate models were then constructed at the scale of the structure to obtain displacements at the points of interest, related to the operating limit states of the spillways, and thus to estimate the residual reliability of the dam. The sensitivity analysis computations as well as the construction of the surrogate models were implemented in Fortran, Java and OpenTURNS. Computations on concrete cores and Song Loulou dam spillway were performed under Cast3M.

Keywords: Alkali-aggregate reaction (AAR), Sensitivity analysis, Surrogate model (metamodel), Anisotropy, Dam, Reliability.